HELSINGIN YLIOPISTO

Ymmärtämistä ulkoa oppimisen sijaan: opetuspaketti peruskoulun trigonometriaan

Helsingin yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikan opettajan koulutusohjelma
Pro gradu -tutkielma
Matematiikka
Marraskuu 2013
Linnea Tamminen

Ohjaaja: Anna Kairema

Tiedekunta - Fakultet - Faculty
Matemaattis-luonnontieteellinen

Laitos - Institution - Department
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä - Författare - Author
Linnea Tamminen

Työn nimi - Arbetets titel
Ymmärtämistä ulkoa opettelun sijaan: opetuspaketti peruskoulun trigonometriaan

Oppiaine - Läroämne - Subject
Matematiikka

Työn laji/ Ohjaaja - Arbetets art/Handledare - Level/Instructor	Aika - Datum - Month and year	Sivumäärä - Sidoantal - Number of pages
Pro gradu -tutkielma / Anna Kairema	Marraskuu 2013	46 s + 16 liites.

Tiivistelmä - Referat - Abstract

Tutkielmassa tarkastellaan tutkivan oppimisen menetelmän soveltamismahdollisuuksia yläkoulun trigonometrian opetuksessa GeoGebra-avusteisessa työskentelyssä.

Tutkielmassa on tehty opetuspaketti yläkoulun trigonometriaan. Opetuspakettiin kuuluu viisi oppituntia, joiden aiheet ovat kolmioiden yhdenmuotoisuus, Pythagoraan lause sekä suorakulmaisen kolmion trigonometria: sivun ja kulman ratkaiseminen sinin ja kosinin avulla sekä tangentti. Oppitunnin rakenne on nelivaiheinen: ongelman asettaminen, tiedon ja selitysten luominen, uuden tiedon hankkiminen ja luominen sekä asiantuntijuuden jakaminen. Oppitunnit toteutetaan keskustelujen, tehtäväpaperien ja GeoGebra-sovelmien avulla. Opetuspakettiin valittujen menetelmien, tehtävien ja työskentelytapojen tarkoituksena on kehittää oppilaan ymmärrystä opittavasta aiheesta oman oivaltamisen kautta.

Tutkielman teoreettisena viitekehyksenä sekä oppituntien suunnittelun pohjana on toiminut niin sanottu TPACK-malli. Se auttaa huomioimaan opettajan asiantuntijuuden rakentumisen kolme eri osa-aluetta erikseen sekä niiden väliset yhteydet. Nämä kolme osa-aluetta ovat sisältötieto eli itse aineenhallinta, pedagoginen tietämys sekä teknologinen tietämys. Sisältönä on tässä tutkielmassa trigonometria, joka on keskeisessä asemassa yläkoulun matematiikan opetuksessa. Pedagogiikkana on tutkivan oppimisen menetelmä ja teknologiana toimii GeoGebra. Tutkielman teoriaosuudessa tarkastellaan TPACK-mallia, tutkivan oppimisen menetelmää, tieto- ja viestintätekniikkaa opetuskäytössä sekä esitellään aiempia tutkimuksia aiheesta.

Oppitunteja testattiin Helsingin yliopiston aineenopettajille tarkoitetulla GeoGebra-kurssilla. Palautteiden pohjalta raportoidaan kehitysajatuksia paketin parantamiseen. Saadun palautteen perusteella voidaan todeta, että tällä tavalla opettaminen voisi motivoida oppilaita enemmän sekä lisätä oppilaan omaa oivaltamista ja ymmärtämistä trigonometrian käsitteiden omaksumisessa.

Avainsanat - Nyckelord
trigonometria, yläkoulu, tutkiva oppiminen, TVT, GeoGebra, TPACK-malli

Säilytyspaikka - Förvaringsställe - Where deposited
Kumpulan tiedekirjasto, Gustaf Hällströminkatu 2, PL 68 00014 Helsingin yliopisto

Muita tietoja - Övriga uppgifter - Additional information

Sisällys

1 JOHDANTO 1

2 TEOREETTINEN TAUSTA 5

2.1 Opettajan asiantuntijuuden osa-alueet: TPACK-malli 5

2.2 Tutkiva oppiminen 8

2.3 Tieto- ja viestintätekniikka opetuskäytössä 11

2.3.1 TVT ja tutkiva oppiminen 11

2.3.2 GeoGebra 12

2.4 Trigonometria, tutkivan oppimisen menetelmä ja GeoGebra TPACK-mallin valossa 13

2.5 Aiempia tutkimuksia 15

3 TRIGONOMETRIA 17

3.1 Historia 17

3.2 Sovellukset 18

3.3 Käsitteet ja menetelmät 18

3.4 Opetus 19

3.5 Trigonometria oman työni valossa 20

4 YLÄKOULUN TRIGONOMETRIAA TUTKIVAN OPPIMISEN JA GEOGEBRAN AVULLA 22

4.1 Oppitunnin rakenne 22

4.2 Oppitunnin toteutus 23

4.3 Alkuperäiset sovelmat 24

4.4 Oppitunti 1: kolmioiden yhdenmuotoisuus 25

4.5 Oppitunti 2: Pythagoraan lause 28

4.6 Trigonometriset funktiot 31

4.6.1 Oppitunti 3: sivun ratkaiseminen 31

4.6.2 Oppitunti 4: kulman ratkaiseminen 34

4.6.3 Oppitunti 5: tangentti 36

4.7 Oppituntien arviointi ja kehitys 38

4.7.1 Oppituntikohtaiset palautteet 38

4.7.2 Yleinen palaute 40

4.7.3 Kehitysajatukset ja muutokset 41

5 POHDINTAA 42
5.1 Jatkoa työlleni 42
5.2 Merkitys omaan opettajuuteeni 43
LÄHTEET 44
LIITTEET 47

1 Johdanto

Opetushallitus julkaisi tämän tutkielman kirjoittamisvaiheessa perusopetuksen matematiikan oppimistulosten arviointiraportin. Raportin mukaan, jos yläkoulussa on käytetty monipuolisesti erilaisia luokka-aktiviteetteja, oppilaat menestyvät jatkossa opinnoissaan todennäköisesti paremmin. Saman tuloksen tuottavat myös oppilaslähtöiset työtavat, kuten se, että oppilaat neuvovat toisiaan ja selittävät muille ratkaisunsa sekä yhdessä pohditaan ratkaisujen järkevyyttä. (Metsämuuronen 2013). Perusopetuksen opetussuunnitelman (OPH 2004) mukaan opettajalla on vapaus valita työtapansa niin, että perusteena ovat muun muassa oppilaiden keskinäisen vuorovaikutuksen tukeminen sekä omasta oppimisestaan vastuun ottamisen kehittäminen. Juuri tällaiset työtavat yläkoulussa tukevat raportin mukaan menestystä jatkossa. Vuorovaikutuksen ja vastuunottamisen saavuttamista vastaa esimerkiksi tutkivan oppimisen menetelmä, joka on nykyään paljon esillä opetustapoja mietittäessä. Tässä menetelmässä tietoa ei anneta valmiina vaan oppilas itse tutkimalla ja etsimällä kehittää uutta tietoa (Hakkarainen et. al 1999). Oppiminen ajatellaankin enemmän tutkimuksena, joka synnyttää tietoa ja ymmärrystä. Tarkemmin tutkivan oppimisen menetelmään esittelen luvussa 2.2. Tutkivan oppimisen työtavoista on tehty paljon tutkimusta, ja niiden pohjalta on kehitelty malleja tutkivan oppimisen sisällöstä ja rakenteesta. Oman käsitykseni mukaan sen käyttö koulumaailmassa ei kuitenkaan vielä ole kovin yleistä. Itse kohtasin tutkivan oppimisen ensimmäistä kertaa pedagogisissa opinnoissani, kehitys- ja oppimispsykologian kurssilla. Kiinnostus sitä kohtaa heräsin heti, sillä löysin tutkivan oppimisen menetelmästä paljon samoja elementtejä, mitä olen omalla urheilu-urallani käyttänyt hyödyksi: Ensin asetetaan ongelma ja siihen jonkinlainen työskentelyteoria. Tätä teoriaa kokeillaan käytännössä ja arvioidaan sekä saatetaan asettaa syvempiä ongelmia, jotka vaativat uusia työskentelyteorioita. Tätä sykliä jatketaan kunnes olemme luoneet uutta tietoa alkuperäiseen ongelmaan liittyen. Mikä tärkeintä, joukkueurheilijana tämä kaikki on tehty yhdessä pohtimalla ja kokeilemalla, lopulta luoden jaettua asiantuntijuutta.

Teknologian kehittyessä tieto- ja viestintätekniikan (TVT) merkitys opetuksessa korostuu jatkuvasti. Tästä yhtenä suurimpana esimerkkinä on Digabi-projekti, jonka tavoitteena on toteuttaa vuodesta 2019 lähtien kaikki ylioppilastutkinnon kokeet tieto- ja viestintätekniikkaa käyttäen. Ensimmäiset sähköiset ylioppilaskokeet aiotaan käynnistää vuonna 2016, matematiikan osalta muutokset tulevat keväällä 2019 (www.digabi.fi). Jo oman kuuden vuoden yliopisto-opiskelujeni aikana TVT:n käyttö kouluissa on kasvanut valtavasti ja uskon, että tämä suunta tulee jatkumaan vielä pitkään. Luvussa 2.3 esittelen tieto- ja viestintätekniikkaa opetuksessa. Käydessäni yliopistolla kurssin, jolla tutustuttiin GeoGebra-ohjelmiston käytön perusteisiin ja hyödyntämiseen kouluopetuksessa, aloin todella innostua TVT:n mahdollisuuksista opetuskäytössä. GeoGebra on opetuskäyttöön suunniteltu dynaaminen ja vuorovaikutteinen tietokoneohjelmisto. Lisää GeoGebrasta kerron luvussa 2.3.2. Erityisesti juuri tämä kyseinen ohjelmisto sai minut innostumaan ja toimi lähtökohtana koko tämän tutkielmani syntymiseen. GeoGebra soveltuu erityisen hyvin kouluissa käytettäväksi, koska se on ilmainen, helppokäyttöinen niin opettajalle kuin oppilaalle ja on olemassa myös suomen kielellä.

Trigonometria on yksi tärkeä osa yläkoulussa opetettavista matematiikan osa-alueista (POPS 2004). Se on geometrian osa, joka keskittyy kolmion mittaamiseen. Opiskeltaessa trigonometriaa erityisesti suorakulmainen kolmio on merkittävässä roolissa (Kolmio2004). Trigonometrian opiskelussa tarvitaan paljon pohjatietoa muun muassa yhtälönratkaisusta, ja se on helposti sovellettavissa myös käytännön tilanteisiin. Enemmän tietoa trigonometriasta kerron luvussa 3. Itse kiinnostuin yläkoulun trigonometriaan liittyvästä opetuksesta opettaessani sitä opetusharjoittelussa. Se on mielestäni hyvin monipuolinen osa-alue, koska trigonometriassa yhdistyvät monet aikaisemmin opitut asiat, kuten laskusääntöjen sujuva soveltaminen, yhtälöjen ratkaiseminen ja geometrian erilaiset käsitteet. Tästä syystä se saattaa myös aiheuttaa suuriakin vaikeuksia osalle oppilaista. Trigonometriaa tarvitaan myös pitkälti lukion asioissa (LOPS 2003) ja sitä hyödynnetään paljon myös esimerkiksi fysiikassa. Kuitenkin arvioinnit ovat osoittaneet, että geometrian osaaminen on muita matematiikan osa-alueita heikompaa (Rautopuro 2013). Näistä syistä koen tämän aiheen hyvin tärkeäksi ja siksi haluan kiinnittää erityishuomiota sen opettamiseen. GeoGebran yhdistäminen tämän aiheen opettamiseen tuntui erittäin luontevalta. GeoGebra-avusteista tutkivaa matematiikkaa on testattu aiemminkin ja tutkimuksia tästä aiheesta esittelen luvussa 2.5.

Tässä tutkielmassani teen yläkoulun trigonometriaan opetuspaketin, jossa käytän hyödyksi GeoGebraa sekä tutkivan oppimisen menetelmää. Paketti on tarkoitettu käytettäväksi perusopetuksessa sen jälkeen, kun geometrian peruskäsitteet, yhdenmuotoisuus ja algebrasta yhtälönratkaisu on opiskeltu. Tämä tutkielmani sisältää tehtäviä kolmioiden yhdenmuotoisuuden, Pythagoraan lauseen ja trigonometristen funktioiden opetteluun. Varsinaista opetuspakettia esittelen luvussa 4. Paketin laatimisen apuna tutkielmassani on ollut TPACK-malli. Tähän malliin kuuluu kolme osa-aluetta: sisältötieto, pedagoginen tietämys ja teknologinen tietämys. TPACK-malli auttaa huomioimaan opetuksessa kaikki nämä osa-alueet sekä ymmärtämään niiden välisiä suhteita (Mishra & Koehler 2006). Tarkempaa tietoa mallista löytyy luvusta 2.1. Tässä työssä teknologiana toimii GeoGebra, pedagogisena viitekehyksenä tutkivan oppimisen menetelmä ja sisältötietona yläkoulun trigonometria. Koko tutkielmani lähti teknologiasta, GeoGebrasta, liikkeelle. Sen jälkeen mietin, mikä matematiikan sisältö toimisi sen kanssa mahdollisimman hyvin. En halunnut käyttää GeoGebraa vain opettajajohtoisesti, pohdin, mikä opetusmenetelmä voisi auttaa parhaiten ideoideni toteutuksessa. Tätä kautta päädyin käyttämään pedagogiikkana tutkivan oppimisen menetelmää. TPACK-malli auttaa opettajaa toteuttamaan niin yksittäiset tunnit kuin koko opetuspaketin niin, että huomioidaan kaikki mallin osa-alueet ja pohditaan miten ne parhaiten tukevat toisiaan. Lähtökohtana tällaisen paketin luomiseen voi toimia opetettava sisältö (*content*), opetustapa (*pedagogy*) jota haluaisi kokeilla tai, niin kuin minun tapauksessani, teknologia (*technology*) josta on innostunut.

Internetistä löytyy paljon opetukseen GeoGebra-materiaalia. Näistä materiaaleista kuitenkin lähes poikkeuksetta puuttuvat käyttöohjeet ja pedagogiset näkökulmat. Näin ollen ne jäävät hyvin irrallisiksi muusta oppitunnista tai aihekokonaisuuksista. Tästä syystä niitä voi olla vaikea ottaa käyttöön oppitunneille. Tämän tutkielman tavoitteena onkin luoda paketti, joka olisi helppo ottaa opetuksessa käyttöön. Sitä myötä opettaja voi lisätä tutkivan oppimisen menetelmää opetuksessaan ja tehdä näin opetuksesta oppilaskeskeisempää, mikä näyttää saavan jalansijaa yhä enemmän perusopetuksessa. Tässä tutkielmassani olen myös yksinkertaistanut tutkivan oppimisen menetelmää. Tällöin opettajan, joka ei ole ennen kyseistä menetelmää opetuksessaan käyttänyt, on helpompaa tutustua sen käyttöönottoon valmiin pakettini avulla. Paketin myötä tavoitteenani on myös lisätä teknologian käyttöä sekä omassa, että niiden jotka tutkielmaani tutustuvat, opetuksessa. Vaikka GeoGebran käyttö on lisääntynyt noin viiden vuoden aikana voimakkaasti, käytänteitä opetustilanteisiin on kuitenkin vielä niukasti saatavilla. Toivon, että tämän projektin harjoitusten käyttöönoton myötä opettaja voisi syventää omaa asiantuntijuuttaan, sekä jatkossa pystyisi rohkeasti kokeilemaan erilaisia opetusmenetelmiä ja teknologian mahdollisuuksia opetuksessaan.

Opetuspaketin oppitunteja testataan Helsingin yliopiston aineenopettajille tarkoitetulla GeoGebra-kurssilla. Tämän testauksen pohjalta olen koonnut palautteita ja kehitysajatuksia kappaleeseen 4.7. Näiden perusteella oppitunteja on tarkoitus kehittää entistä paremmiksi. Haluan jatkaa paketin kehittelyä vielä tämän tutkielman jälkeenkin ja jakaa sitä myös muiden opettajien käyttöön. Olen koonnut kappaleeseen 5 ajatuksia opetuspaketin jatkosta, ja siitä, mikä merkitys tällä tutkielmalla on ollut opettajuuteeni.

2 Teoreettinen tausta

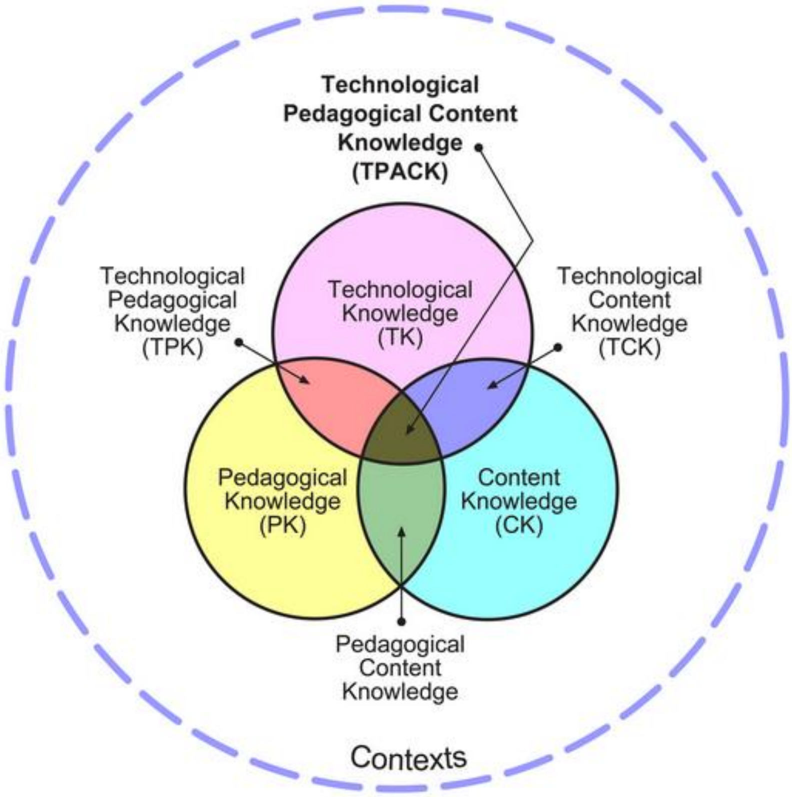
Opettajan vankka substanssiosaaminen ei yleensä riitä onnistuneeseen oppituntiin, vaan on huomioitava myös monia pedagogisia ja didaktisia näkökulmia. Nykyään opetuksen suunnitteluun liittyy kasvavassa määrin myös sopivan opetusteknologian valinta ja sen käyttöön liittyvää ratkaisuntekoa. Opettajan ammattitaitoon kuuluukin kyky huomioida useita osa-alueita opetusta suunnitellessa. Niin sanottu TPACK-malli (luku 2.1) auttaa huomioimaan nämä kolme osaamisen eri osa-aluetta; sisällön, pedagogiikan ja teknologian, sekä ymmärtämään niiden välisiä suhteita. Tämä TPACK-malli on toiminut teoreettisena viitekehyksenä opetuspaketilleni, jossa sisältönä on yläkoulun trigonometria, pedagogiikkana tutkivan oppimisen menetelmä (luku 2.2) ja teknologiana GeoGebra (luku 2.3.2). Selvitän myös tarkemmin näiden osa-alueiden ja niiden välisten suhteiden huomioimista TPACK-mallin valossa (luku 2.4) sekä tieto- ja viestintätekniikan merkitystä opetuksessa (luku 2.3). Lopuksi esittelen aiempia tutkimuksia tutkivasta matematiikasta GeoGebra-avusteisessa työskentelyssä (luku 2.5).

2.1 Opettajan asiantuntijuuden osa-alueet: TPACK-malli

Opettajan toimintaa ohjaa vankka pedagoginen ja sisällöllinen tietämys. Pedagoginen tietämys (*Pedagogical Knowledge, PK*) sisältää tietoa muun muassa opetusmenetelmistä, luokkatilanteen hallinnasta sekä oppilaiden oppimisesta. Esimerkiksi opettaja, jolla on hyvä pedagoginen tietämys, osaa mukauttaa toimintaansa erilaisten oppilaiden kohdalla. Sisällöllinen tietämys tai substanssitieto (*Content Knowledge, CK*) sisältää tietoa opetettavasta aiheesta ja se onkin erittäin tärkeää, jotta oppilaat oppivat asiat oikein. Kun nämä kaksi yhdistetään, muodostuu opettajan pedagoginen sisältötieto (*Pedagogical Content Knowledge, PCK*), jonka keskiössä on tapa, jolla opetettavat aiheet muutetaan opetusta varten: opettaja tulkitsee opetettavan aiheen sisällön, pohtii eri tapoja opettaa sen sekä tekee siitä oppilaille saatavan. Pedagoginen sisältötieto on Shulmanin luoma kohtuullisen vanha malli (1986), jonka eri ulottuvuuksien ymmärtäminen antaa pohjan hyvälle opetukselle.

Teknologia on yleistyttyään tullut merkittäväksi osaksi myös opetusta muun muassa erilaisten tietokoneohjelmistojen digitaalisten oppimateriaalien ja dokumenttikameroiden myötä. Tästä syystä opettaja tarvitsee opetuksen suunnittelussa nykyisin myös teknologista tietämystä (*Technological Knowledge, TK*). Tämä tieto sisältää tuntemusta teknologian tarjoamista mahdollisuuksista ja siihen liittyvistä laitteista sekä ohjelmista. Näin ollen opettajan on nykyään osattava huomioida kaikki nämä kolme osa-aluetta: sisältötieto, pedagoginen tieto sekä teknologinen tietämys erikseen, ja ymmärrettävä niiden välisiä yhteyksiä.

Varsinkin teknologista osaamista on usein ajateltu täysin erillisenä osana opettajan tietämystä. Lisäämällä tämän komponentin pystymme täydentämään aikaisempaa Shulmanin mallia: muodostuu kolme paria ja yksi kolmikko. Pedagogisen sisältötiedon lisäksi opettaja tarvitsee tietoa siitä miten tietty teknologia soveltuu tietyn matematiikan sisällön tarkasteluun, eli teknologista sisältötietoa (*Technological Content Knowledge, TCK*). Esimerkiksi, miten GeoGebra auttaa trigonometriaa opiskeltaessa. Opettajan on huomioitava myös opetuksen muuttuminen teknologiaa käytettäessä, sekä pohdittava miten tietty teknologia soveltuu opetuskäyttöön. Tarvitaan siis teknologista pedagogista tietämystä (*Technological Pedagogical Knowledge, TPK*). Esimerkiksi, mitä uusia pedagogisia asioita opettajan on otettava huomioon työskenneltäessä tietokoneilla verrattuna omassa pulpetissa tai minkä ikäisille jokin ohjelma soveltuu ja onko se tarkoitettu opettajan vai oppilaiden käyttöön. Kun kaikki kolme osa-aluetta huomioidaan yhtä aikaa, on kyseessä teknologinen pedagoginen sisältötieto (*Technological Pedagogical Content Knowledge, TPCK*). Se on hyvin monitasoista tietämystä, johon kuuluu pedagogista tietoa siitä miten opettaja voi rakentavasti käyttää teknologiaa jonkin aiheen opetuksessa sekä tietoa miksi jokin aihe on helppo/vaikea ja miten teknologia voisi siinä auttaa. Kaikessa tässä opettajan on myös huomioitava konteksti, eli esimerkiksi oppilaiden ikä, opetettava asia sekä käytössä oleva teknologia. Tätä kokonaisuutta kutsutaan TPACK-malliksi ja sitä havainnollistaa kuva 1. (Mishra & Koehler 2006).



Kuva 1. TPACK-malli (Reproduced by permission of the publisher, © 2012 by http://tpack.org)

TPACK-malli on laajennus Shulmanin (1986) mallille pedagogisesta sisältötiedosta, kun käytetään teknologiaa osana opetusta. Se toimii pohjana hyvälle opetukselle, sillä laadukas opetus ymmärtää mallin esittämiä suhteita sekä osaa luoda vaadittavia strategioita eri asioiden opetukseen. TPACK-mallin esittämien osa-alueiden huomioiminen voi parhaimmillaan auttaa opettajaa huomioimaan asioita kokonaisuutena eikä vain kolmena erillisenä osana: jos yhtä asiaa muutetaan, on myös muita osa-alueita muutettava. (Mishra & Koehler 2006).

TPACK-mallia käytetään muun muassa opettajankoulutuksen suunnittelun apuna. Esimerkiksi the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) tuki TPACK ajatusta jo 2000-luvun alussa esittämällä, että teknologia on välttämätöntä matematiikan opettamisessa ja oppimisessa. NCTM puolsi ajatusta, että opettajien tulisi itse kokea oppimista, jossa sisällytetään teknologiaa merkityksellisellä tavalla, jotta he voisivat luoda samanlaisen ympäristön. Samoin the Association for Mathematics Teacher Educators (AMTE) puhuu teknologian sisällyttämisen opettajankoulutukseen puolesta. Heidän mielestään pitää taata, että opettajilla on mahdollisuus hankkia tarvittavaa tietoa ja kokemusta teknologian liittämisestä opettamiseen ja oppimiseen. (Niess et. al 2009). TPACK-malli toimii siis apuna sekä opettajankoulutuksen suunnittelijoille että yksittäisille opettajille, jotka suunnittelevat tai tarkastelevat omaa opetustaan.

2.2 Tutkiva oppiminen

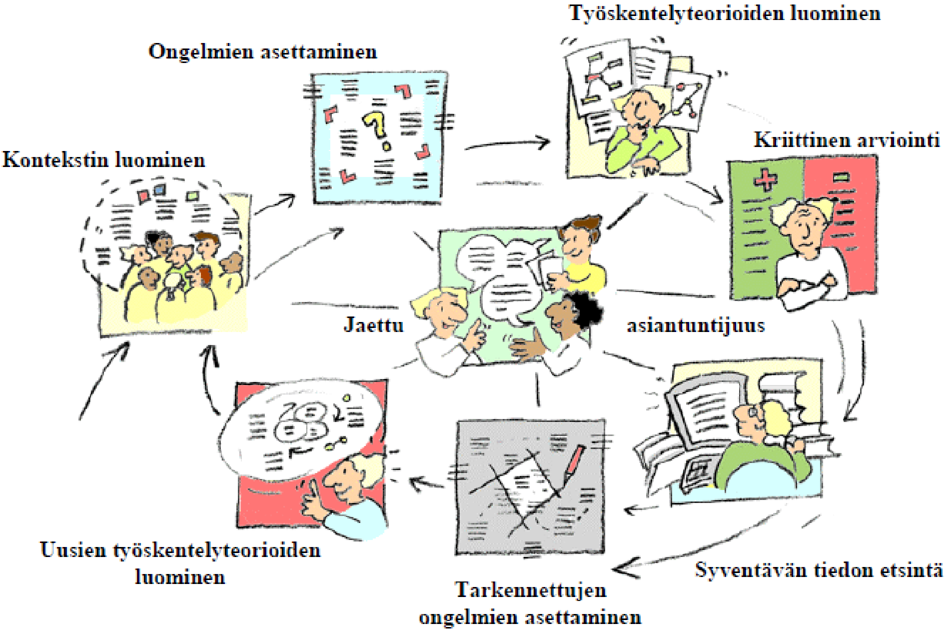
Useimmat eivät omaksu tietoa kovin hyvin vain kuulemalla tai lukemalla. On todettu, että parhaiten opitaan muun muassa tekemällä, kokemalla itse tai käymällä läpi oivaltamisen. Tällaiset prosessit vievät yleensä enemmän aikaa kuin perinteinen luennointi, mutta tekevät oppimisesta osan jokaisen oppilaan elämänkokemusta. Oppimistavasta huolimatta meillä on tapana muistaa elämänkokemukset melko hyvin. Näin ollen oppilaat säilyttävät paremmin oppimiskokemuksen sekä tiedon, jota se pitää sisällään. Lisäksi heille tulee tunne, että ikään kuin omistavat tiedon, koska itse sen keksivät. (Nilson 2003).

Oppimista kuvataan jatkuvasti enemmän prosessina, jossa oppilaat aktiivisesti sitoutuvat oppimiseensa verrattuna perinteiseen rooliin passiivisina opettajalta saadun tiedon vastaanottajina (Samuel 2013). Myös se, että opettaja saa oppilaat tuottamaan ja esittämään tieto omin sanoin sekä esittämään kysymyksiä, vastaa paremmin opettajan tehtävää, toisin kuin, jos vain opetetaan vastaamaan kysymyksiin (Gonzalez 2013). Muun muassa erilaiset oppilaiden tekemät tutkimukset opetuksessa toteuttavat tällaista oppilaslähtöistä lähestymistapaa. Ne tuovat hyvin näkyviin oppilaiden oppimisen sekä opettajalle että heille itselleen (Gonzalez 2013). Tutkimukset ovat osoittaneet, että tutkimuksiin suuntautuneella opetuksella saavutetaan myös paljon erilaisia etuja, esimerkiksi motivaatioon ja oppimiseen. Tämän lisäksi yhteistoiminnallinen oppiminen on tehokas oppilaskeskeinen menetelmä sillä se välittää viestin, että yhdessä voidaan saavuttaa enemmän kuin yksilöinä työskenneltäessä. (Nilson 2003).

Yksi oppilaiden aktiivisuutta korostava opetustapa on tutkivan oppimisen menetelmä. Hakkarainen et. al. (2004) kirjoittavat tutkivasta oppimisesta seuraavaa:

> *”Tutkivan oppimisen lähtökohtana on ajatus, jonka mukaan oppiminen on parhaimmillaan tutkimusprosessi, joka synnyttää sekä uutta ymmärrystä, että uutta tietoa.”*

Kyse on sellaisesta oppimisen tavasta, jossa tietoa ei anneta valmiina, vaan oppija itse ohjaa omaa oppimistaan, esimerkiksi asettamalla ongelmia ja hakemalla tietoa itsenäisesti (Hakkarainen et. al 1999). Tutkiva oppiminen koostuu seuraavista kuudesta osatoiminnosta: kontekstin luominen, ongelman asettaminen, tiedon ja selitysten luominen, rakentava kriittinen arviointi, uuden tiedon hankkiminen ja luominen sekä asiantuntijuuden jakaminen. Nämä osatoiminnot muodostavat syklisen prosessin. Tätä prosessia on havainnollistettu kuvassa 2.



Kuva 2. Tutkivan oppimisen prosessi (Hakkarainen et. al 1999, s. 13)

Vaikka tutkiva oppiminen on hyvin oppilaslähtöistä, on opettajalla ratkaiseva rooli sen onnistumisessa (Hakkarainen et. al. 2004). Tutkivassa oppimisessa opettaja ei toimi tiedonjakajana vaan enemmänkin ohjaajan roolissa. Hän ohjaa oppilaita asettamaan ongelmia, luomaan selityksiä ja etsimään uutta tietoa (Hakkarainen et. al 1999). Opettajan rooli on erityisen merkittävä tiedonkeruuvaiheessa, jotta oppilaat löytävät aiheeseen liittyvää tietoa. Toinen vaihe, jossa opettajan rooli korostuu, on lopullisen tiedon jakamisen vaihe. Silloin varmistetaan, että kaikki olennainen tieto on tullut löydettyä. Vain opettajan tuen ja ohjauksen avulla tutkiva oppiminen johtaa oppimisen laadun paranemiseen (Hakkarainen et. al 1999).

Yleensäkin tällaisissa tutkimiseen pohjautuvissa ympäristöissä oppilaat ottavat paljon vastuuta omasta oppimisestaan. Tämä ei kuitenkaan tarkoita sitä, että heidät jätetään täysin ilman ohjausta ja annetaan tehdä mitä he haluavat. Enemminkin tällainen ympäristö on erittäin tarkoin opettajan suunnittelema ja työskentely toteutetaan tarkoin määrättyjen muuttujien parissa. Oppilaat voivat kokea olevansa vapaampia, esimerkiksi käyttämään paria apunaan, mutta varsinainen tutkimusprosessi on parhaimmillaan tarkoituksenmukaista. (Gonzalez 2013). Oppilaskeskeiset menetelmät opettavat, että asiantuntijan ohjauksella, oppija voi itse aktiivisesti keksiä, analysoida ja käyttää tietoa. Tällaisella valtuuttamisella oppilaat oppivat ottamaan vastuuta omasta oppimisestaan. (Nilson 2003). Vastuun ottamisen lisäksi myös yhteistoiminnallinen oppiminen opettaa tärkeitä taitoja oppilaiden tulevaisuutta ajatellen. Samasta syystä tiedon jakamisen vaihe on tärkeä tutkivan oppimisen menetelmässä. Tarkoituksena ei ole vain varmistaa, että kaikki tarvittava tieto on tullut esiin. Tällä vaiheella halutaan myös välittää ajatusta, että ihmisen osaaminen kuvataan esimerkiksi asiantuntijoiden verkostona, eikä niinkään yksittäisen ihmisen taitona (Hakkarainen et. al 1999).

Otettaessa käyttöön tutkivan oppimisen menetelmää, on oppimiskulttuuria hyvä muuttaa asteittain. Tämä voidaan aloittaa pienemmillä projekteilla, jolloin voidaan kiinnittää huomioita vain joihinkin tutkivan oppimisen osatekijöihin, esimerkiksi ongelman asettamiseen. Myöhemmin menetelmiä voidaan laajentaa ja toteuttaa kokonaisia laajoja projekteja tutkivan oppimisen mallilla. Kaikkia vaiheita ei kannata ymmärtää liian mekaanisesti, vaan joitakin vaiheita voidaan tarvittaessa jättää pois. Myös ongelmia voidaan välillä antaa valmiina oppilaille, sekä esimerkiksi luokassa suoritettava kokeellinen työ voi toimia tiedonhankinnan välineenä. (Hakkarainen et. al 1999).

Muun muassa Hähkiöniemi ja Leppäaho (2010) ovat tutkineet matematiikassa tutkivaa lähestymistapaa. He käyttävät tästä termiä tutkiva matematiikka ja se sisältää paljon samoja piirteitä kuin Hakkaraisen ynnä muiden malli tutkivasta oppimisesta. Tutkiva matematiikka koostuu vain muutamasta osatekijästä: oppitunnin rakenteeseen kuuluu yleensä alustus-, tutkimus- ja koontivaihe. On todettu, että matematiikassa tutkivan lähestymistavan käyttäminen edistää matematiikan oppimista. (Hähkiöniemi & Leppäaho 2010).

2.3 Tieto- ja viestintätekniikka opetuskäytössä

Tieto- ja viestintätekniikan käyttö on noussut 2000-luvulla tärkeään asemaan niin arjessa kuin kouluissakin. Koska oppilaat käyttävät kodeissa tietotekniikka, se innostaa heitä tekemään samoin myös kouluissa. Kuitenkin näyttää siltä, että Suomessa TVT:n kokonaisvaltainen ja pedagoginen opetuskäyttö odottaa vielä läpimurtoaan (OPH 2011). Erityisesti opetuksen toteutukseen tieto- ja viestintätekniikkaa käytetään harvemmin. Sen sijaa opettajat lähinnä hakevat tietoa internetistä, tekevät esityksiä PowerPointilla tai havainnollistavat opettamistaan internetistä löytyvillä kuvilla tai videoilla. TVT tarjoaa nykyään paljon erilaisia ja kehittyneitä välineitä mallintamiseen ja visualisointiin, joita oppilaat itse pystyvät tutkimaan. Kuitenkin yksi syy miksi läpimurtoa ei ole vielä tapahtunut, johtuu internetistä löytyvien valmiiden materiaalien puutteesta. Erityisesti tutkivaa oppimista tai muita uusia opetusmenetelmiä tukevaa materiaalia on vain pieni osa. (OPH 2011).

PISA-tutkimuksen mukaan TVT:n käytön ja matematiikan oppimistulosten välillä on positiivinen yhteys (OECD 2004). Tutkimuksissa on myös todettu, että oppilaiden motivaatio oppimista kohtaan kasvaa ja oppilaat osallistuvat aktiivisemmin opetukseen, kun opetuksen tukena käytetään tieto- ja viestintätekniikkaa (OPH 2011). Kuitenkin on huomioitava, että pelkkä TVT:n käyttö ei riitä. Tavoitteena tulisi olla opetusmenetelmien ja toimintakulttuurin muutos, johon liitetään tieto- ja viestintätekniikan käyttöä.

2.3.1 TVT ja tutkiva oppiminen

Opettajan rooli tulee jatkossa muuttumaan perinteisen tiedon jakajan asemasta enemmän oppimisen ohjaajaksi (OPH 2011). Tämä merkitsee sitä, että tutkivan oppimisen ja TVT:n merkitys kouluopetuksessa kasvaa entisestään. Nämä tukevatkin erittäin hyvin toisiaan, sillä TVT luo uudenlaisia mahdollisuuksia ja välineitä tutkivan oppimisen toteutukseen: oppilas pystyy esimerkiksi kokeilemaan tutkivaa oppimista käytännössä sekä testaamaan vaihtoehtoisia käytäntöjä (Hakkarainen et. al 1999). Näin ollen tutkivan oppimisen menetelmä antaa tavan käyttää TVT:tä opetuksen toteutuksessa. Molemmat edesauttavat myös oppilaslähtöistä työskentelyä, opettajan toimiessa enemmän ohjaajan roolissa, lisäten samalla oppilaiden omaa vastuuta oppimisprosessissa.

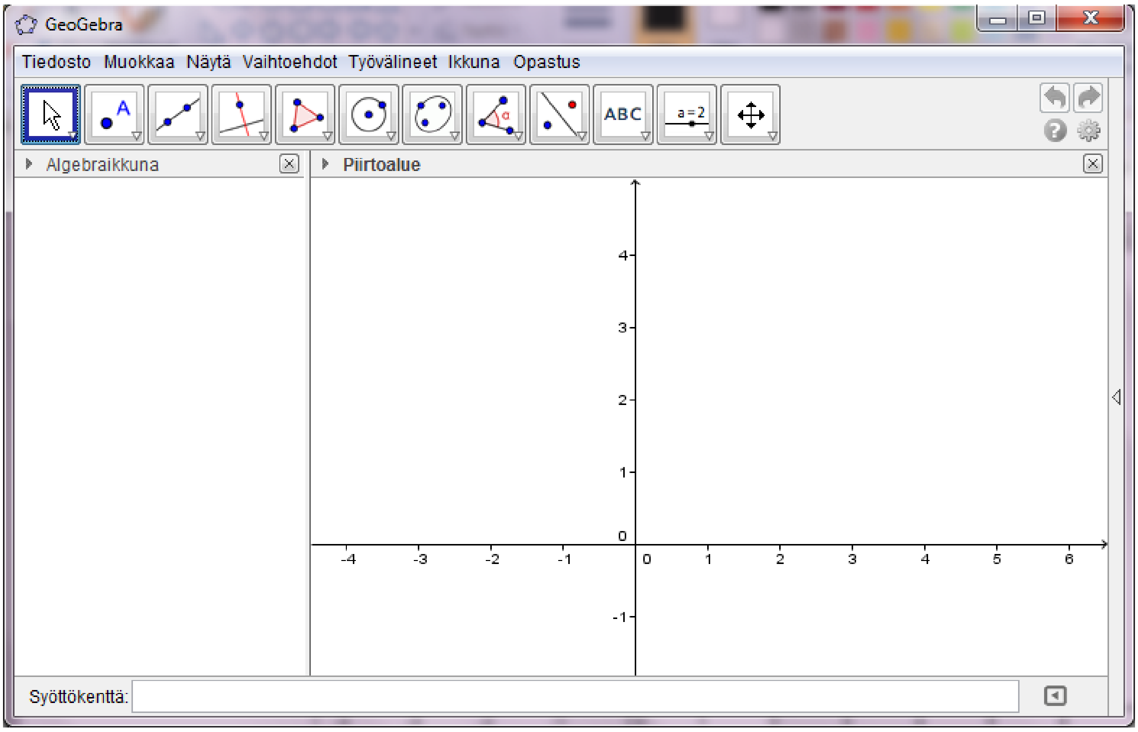
Tieto- ja viestintätekniikka antaa mahdollisuuden luoda oppimisympäristöjä, joissa oppilaat pääsevät aktiivisesti tuottamaan tietoa. Opettajat eivät kuitenkaan vielä juurikaan käytä näitä mahdollisuuksia hyväkseen (OPH 2011). Tässä kohtaa tutkivan oppimisen menetelmä nousee vielä enemmän merkittävään rooliin, jonka projekteista pystyisi helposti luomaan oppimisympäristön. Näin myös esimerkiksi sairauden takia poissa olleet oppilaat pystyisivät seuraamaan missä opetuksessa mennään ja kertailemaan opittuja asioita.

2.3.2 GeoGebra

GeoGebra (www.geogebra.org) on tietokoneohjelmisto, joka tarjoaa mallinnusapua ennen kaikkea geometrian opetukseen ja sopii käytettäväksi kaikilla koulutusasteilla alakoulusta yliopistoon asti. GeoGebra on kehitetty nimenomaan opetuskäyttöä varten. Se on dynaaminen ja vuorovaikutteinen ohjelmisto, jolla pystyy muun muassa piirtämään funktioiden kuvaajia ja geometrian kuvioita, laskemaan sekä tekemään animaatioita. GeoGebra on ilmainen, jolloin se ei vaadi taloudellisia resursseja koululta, ja sen pystyy lataamaan omalle koneelleen tai käyttämään selaimen kautta. Näin se voi toimia sekä opettajan työvälineenä että oppilaan oppimisen apuna oppitunnilla tai kotitehtäviä tehdessä. Sen etuja ovat helppokäyttöisyys, monipuolisuus sekä se, että ohjelma on saatavilla myös suomen kielellä. GeoGebran käyttö opetuksessa vastaa perusopetuksen opetussuunnitelman (2004) esittämään TVT:n käytön toteutukseen oppilaan oppimisprosessin tukena. Erityisen hyvin se tukee oppilaan itsenäistä työskentelyä.

GeoGebran työskentelyalusta koostuu piirtoalueesta, työvälinepalkista, algebraikkunasta sekä syöttökentästä. Tämä työskentelyalusta on esitetty kuvassa 3. Piirtoalueelle tuotettu kuva on dynaamisesti muuteltavissa, jolloin se soveltuu erinomaisesti tutkivaan ja kokeilevaan oppimiseen. GeoGebran käyttö onkin hyvä tapa siirtää painopistettä opettajajohtoisesta työskentelystä itsenäiseen ongelmanratkaisuun. Ohjelmaa kehitetään jatkuvasti, jolloin sen monipuolisuus kasvaa entisestään ja ominaisuuksia tulee koko ajan lisää.

GeoGebralla on mahdollisuus luoda simulaatioita, joiden kanssa työskennellessä oppilaat pystyvät itse manipuloimaan muuttujia ja näin ollen välittömästi tutkimaan muutosten seurauksia. Näiden simulaatioiden pohjalta oppilaat voidaan ohjata ratkaisemaan taustalla olevia sääntöjä ja lainmukaisuuksia. Tämä on omien tehtävieni perusajatus. Opettaja pystyy myös muuttamaan ohjelman peruspohjaa sekä työvälineitä tarpeidensa mukaisiksi. Tämä mahdollistaa työskentelyalustan muokkaamisen tilanteeseen sopivaksi ja mahdollisimman yksinkertaiseksi. GeoGebran etuina ovat dynaamisuus ja vuorovaikutteisuus, jotka tukevat hyvin tutkivan oppimisen menetelmääkin. Se voi myös auttaa oppilasta, jolla on ongelmia hienomotoriikassa, eikä näin ollen pysty hyvin käyttämään viivainta tai harppia.



Kuva 3. GeoGebran työskentelyalusta: piirtoalue, työvälinepalkki, algebraikkuna ja syöttökenttä

2.4 Trigonometria, tutkivan oppimisen menetelmä ja GeoGebra TPACK-mallin valossa

Tässä työssäni opetuspaketin oppitunneilla teknologiana toimii GeoGebra, sisältönä yläkoulun trigonometria ja pedagogiikkana tutkivan oppimisen menetelmä. Työtä tehdessäni TPACK-malli auttaa minua pohtimaan, miten tutkivan oppimisen menetelmää voidaan käyttää trigonometrian opetuksessa, ja miten

GeoGebra auttaa aiheen opiskelussa: malli ohjasi minut pohtimaan esimerkiksi mitä tutkivan oppimisen osia olisi hyvä käyttää trigonometriaa opiskeltaessa sekä miten GeoGebra-sovelmat voisivat auttaa aiheen ongelmakohdissa. TPACK-malli auttaa minua myös kohdistamaan huomion kokonaisuuksiin, eikä vain joihinkin käyttämiini osa-alueisiin. Se toimii viitekehyksenä koko opetuspaketilleni. Työni lähti siis liikkeelle teknologiasta, eli GeoGebrasta. Tämän jälkeen pohdin minkä sisällön opetukseen se soveltuisi hyvin, mitä kautta päädyin trigonometriaan. Pedagogian osalta GeoGebran vuorovaikutteisuus ja dynaamisuus pääsevät oikeuksiinsa tutkivan oppimisen menetelmää käytettäessä. Tästä tulee hyvin esiin TPACK-mallin osien vuorovaikutus ja se, miten yhden osan valinta vaikuttaa kahteen muuhun osa-alueeseen. Näin tehtäessä muodostuu kolmikko, joka tukee hyvin toisiaan.

Trigonometriasta yläkoulussa opetettavat asiat ja se, miten ne muutetaan opetettavaan muotoon, kuuluvat pedagogiseen sisältötietämykseen. Tähän kuuluu myös tieto aihealueen vaikeuksia tuottavista asioista ja miten niitä voisi opettaa. Esimerkiksi miten opettaja voi rohkaista itseluottamuksen puutteesta kärsiviä oppilaita tai tukea motorisia vaikeuksia. Teknologiseen pedagogiseen tietämykseen kuuluu muun muassa tieto siitä, että GeoGebra on kehitetty nimenomaan opetustarkoitukseen. Se voi olla opettajan apuna, mutta muuntuu myös helposti oppilaan työvälineeksi helppokäyttöisyyden ja työkalujen muokkailtavuuden vuoksi. Tämän lisäksi piirtoalueelle tuotetut, dynaamisesti muuttuvat kuvat auttavat ongelman tutkimisessa ja ratkaisun löytämisessä. Näistä syistä johtuen GeoGebra soveltuu erittäin hyvin tutkivaan oppimiseen. Teknologista sisältötietämystä on muun muassa se, että GeoGebra soveltuu erinomaisesti trigonometrian opetukseen, koska sillä on helppo piirtää geometrian kuvioita. Näitä kuviota pystyy muuntelemaan säilyttäen halutut ominaisuudet, sekä niiden osia voidaan mittailla tai laskea kaavojen avulla erilaisia tuloksia. Työkalujen avulla voidaan tehdä esimerkiksi halutun kokoisia kulmia, ohjeistuspainikkeita ja lisätä haluttuja tekstejä.

2.5 Aiempia tutkimuksia

GeoGebra-avusteista tutkivan matematiikan opetusta on tutkitta muun muassa Jyväskylän yliopiston opettajankoulutuslaitoksella osana ”Tutkiva matematiikka opetusharjoittelussa” –projektia (Hähkiöniemi 2011). Suomalainen ja Vuorela tutkivat oppilaiden kohtaamia vaikeuksia johdatus trigonometriaan tunnilla, ja Nuutinen ja Paappanen suorakulmaisten kolmioiden yhdenmuotoisuutta. Molemmat tutkimukset on julkaistu Hähkiöniemen (2011) artikkelikokoelmassa ”GeoGebra-avusteinen tutkiva matematiikka opetusharjoittelussa – tutkimuksia opettajan ja oppilaan toiminnasta”. Tutkimukset on tehty Jyväskylän normaalikoulun 8. luokan matematiikan tunneilla, joissa käytettiin apuna tehtävämonistetta sekä GeoGebra-tehtäviä. Raportointi on tehty yhden tunnin mittaisesta kokeilusta, jossa oppilaat työskentelivät GeoGebra-avusteisten tehtävien parissa. Molemmilla oppitunneilla opiskeltiin suorakulmaisen kolmion sivujen suhdetta. Tutkimuksissa käytettiin videoanalyysia, ensimmäisessä kuvattiin opettajan toimintaa ja jälkimmäiseksi mainitussa kahden oppilaan työskentelyä. Nuutinen ja Paappanen analysoivat myös oppilaiden täyttämää tehtävämonistetta.

Suomalaisen ja Vuorelan tutkimuksen yleisimpänä oppilaiden kohtaamana vaikeutena todettiin oppilaiden itseluottamuksen vähäisyys. Opettajan tuen ja rohkaisun merkitys korostui esimerkiksi tehtävänannon ymmärtämisessä ja oppilaan ajattelun ohjauksessa kysymysten avulla. Tämä ensimmäiseksi mainittu tutkimus siis vahvisti käsitystä opettajan tärkeästä roolista päättelyprosessin avustajana. Suomalainen ja Vuorela kuitenkin epäilivät itseluottamuksen ongelmien osittain johtuneen tutkivan matematiikan oppitunnin poikkeavuudesta tavalliseen matematiikan oppituntiin nähden. Muita merkittäviä vaikeuksia oppilaat kokivat tehtävänannon ymmärtämisessä sekä käsitteiden heikossa hallinnassa. Näitä kaikkia vaikeuksia opettajan tulee valmistautua tukemaan oppituntia suunniteltaessa.

Nuutinen ja Paappanen halusivat selvittää voiko tutkivasta matematiikasta ja GeoGebrasta olla hyötyä kolmioiden yhdenmuotoisuutta opittaessa. Ainakin tässä yhteydessä GeoGebra auttoi muun muassa hylkäämään väärän ratkaisun tai teorian pois. Tutkimuksen johtopäätöksissä todettiin, että GeoGebra voi olla tärkeä työkalu matemaattisen ongelman hahmottamisessa ja ratkaisemissa. Myös tässä tutkimuksessa havaittiin, että opettajaa tarvitaan havaintojen avuksi, ja säännöllisellä käytöllä saavutettaisiin enemmän hyötyä. Huomiota kiinnitettiin myös parityöskentelyyn, jossa oppilas saattaa passivoitua ollessaan taitavamman oppilaan parina.

Tässä työssäni sovellan laajemmin näiden tutkimuksien oppituntien ideaa muihin trigonometrian aihealueisiin. Aiheesta kiinnostunut voi tutustua myös näissä kahdessa tutkimuksessa mainittuihin viitteisiin.

3 Trigonometria

Esittelen tässä kappaleessa opetuspaketin oppitunneilla opetettavaa aihealuetta. Kerron trigonometrian historiasta (luku 3.1), sovelluksista (luku 3.2) sekä opetuksen kannalta merkittävistä asioista (luvut 3.3 ja 3.4). Lopuksi (luku 3.5) esittelen trigonometrian tärkeimmät osa-alueet oman opetuspakettini kannalta.

3.1 Historia

Trigonometria on geometrian osa-alue, joka keskittyy kolmion mittaamiseen: nimitys nimi tulee kreikan kielen sanoista *tri* (kolme), *gono* (kulma) ja *metria* (mitata). Kolmiomittausta on osattu yhtä kauan kuin geometriaa. Geometria ja trigonometria ovat hyvin vanhoja matematiikan osa-alueita, sillä jo 5000 vuotta sitten babylonialaiset laativat taulukoita kolmioiden sivujen suhteista. Myös egyptiläisten suuret rakennelmat ovat osoitus kolmiomittaamisen erinomaisesta hallinnasta. Trigonometria muokkautui alussa vuorovaikutuksessa tähtitieteen kanssa. Tämä on merkittävää, koska tähtitiede loi tarpeen trigonometrian kehittämiselle yhä pidemmälle. Trigonometrian isäksi kutsuttu Hipparkhos Nikealainen (n. 190–120 eKr.) olikin nimenomaan tähtitieteilijä. Hän oli ensimmäinen kreikkalainen, jonka tiedetään käyttäneen kulman mittaamiseen asteita, minuutteja ja sekunteja. Hän myös oivalsi, että jokainen kolmio voidaan piirtää jonkin ympyrän sisälle. Tämän pohjalta Hipparkhos loi taulukon, jota voidaan pitää ensimmäisenä trigonometrisenä taulukkona. Erilaiset trigonometriset taulukot, erityisesti sinitaulukko, ovat olleet keskeinen osa trigonometrian kehitystä aina taskulaskinten ja tietokoneiden kehittämiseen asti. Näiden taulukoiden tarkkuus ja virheettömyys olivat edellytys luotettaville laskemille.

Varsinainen trigonometrian kehitys alkoi 100-luvulta, jolloin Ptolemaios (n. 100–160 jKr.) paransi Hipparkhoksen taulukkoa ja erotti trigonometrian omaksi matematiikan osa-alueeksi. Tämän ensimmäisen, keskiajalle kestäneen, kehitysvaiheen aikana tieto trigonometriasta levisi Intiaan ja sieltä arabien tietoon, jotka kehittivät trigonometriaa pidemmälle. Vasta keskiajan jälkeen, trigonometrian toisessa kehitysvaiheessa, alkoivat trigonometrian käsitteet tarkentua ja kaikki kuusi trigonometristä funktiota kehiteltiin. Myös pallotrigonometria kehittyi tänä aikana, erityisesti juuri arabimatemaatikkojen käsissä. Tämä toinen kehitysvaihe kesti 1600-luvun puoliväliin asti. Viimeisen vaiheen alkuunpanijoina toimivat Sir Isaac Newton (1643–1727) ja Gottfried Leibniz (1646–1716). Kuitenkin ehkä tärkein tämän vaiheen matemaatikko oli Leonhard Euler (1707–1783), joka vakiinnutti nykyiset trigonometrian merkinnät. Hän myös laati systemaattisen esityksen trigonometristen funktioiden differentiaali- ja integraalilaskennalle. (Luoma-Aho 2010, Kolmio 2004).

3.2 Sovellukset

Trigonometriasta löytyy paljon yhteyksiä käytäntöön ja se onkin aiheena varsin käytännönläheinen. Esimerkiksi maanmittauksessa ja rakentamisessa käytetään trigonometriaa apua. Myös oppilaiden kanssa voi lähteä ulos mittaamaan muuan muassa rakennusten tai puiden korkeuksia, kun etäisyys ja kaltevuuskulma jossakin kiintopisteessä tunnetaan. Tämän trigonometrian klassisen ongelman ratkaisemisessa voidaan käyttää hyväksi kulmamittaria, jonka oppilaat pystyvät myös itse rakentamaan. Jatkettaessa trigonometrian opiskelua pidemmälle, myöhemmin vastaan tulee myös pallotrigonometria, jossa tutkitaan pallon pinnalle, isoympyrän kaarista, muodostuvaa kolmiota. Pallotrigonometrian sovellukset ovat merkittäviä tähtitieteen ja navigoinnin kannalta.

3.3 Käsitteet ja menetelmät

Kuten matematiikka yleensäkin, trigonometrian oppiminen vaatii kykyä yhdistellä aiemmin opittuja asioita. Pohjatiedoissa tärkeässä roolissa ovat muun muassa potenssiinkorotuksen ja neliöjuuren laskusäännöt, yhtälönratkaisu sekä geometrisiin kuvioihin liittyvät ominaisuudet, kuten suorakulma. Myös tietyt taidot, kuten laskimen käyttö sekä mallikuvien piirtäminen ja tulkitseminen, ovat merkittävässä osassa trigonometriaa opittaessa. Trigonometriassa yhdistyvät siis hyvin vahvasti käsite- ja menetelmätieto: Esimerkiksi Pythagoraan lause ja trigonometriset funktiot ovat geometrista käsitetietoa, jotka oppilaan on opittava. Pohjatiedoissa on paljon muutakin käsitetietoa, kuten suorakulmainen kolmio, kateetti ja hypotenuusa, jotka oppilaan pitää muistaa. Yhtälönratkaisu kuuluu etukäteen osattaviin menetelmätietoihin, kun taas laskimen käyttöä trigonometrisissä funktioissa sekä mallikuvioiden piirtämistä ja tulkitsemista opiskellaan kurssin aikana. Mitä pidemmälle trigonometriassa edetään, sitä enemmän eteen tulee tehtäviä, joissa on osattava yhdistellä useampia opittuja käsitteitä ja menetelmiä ratkaisun löytämiseksi. Esimerkiksi pinta-alan laskemiseksi pitää käyttää sekä Pythagoraan lausetta että trigonometrisia funktioita.

3.4 Opetus

Trigonometriaan, niin kuin geometriaan yleensäkin, liittyvät vahvasti erilaiset valmiit mallikuvat sekä niiden piirtämiset. Tarkoituksena on siis kehittää myös oppilaiden spatiaalista ajattelua, eli sellaista matemaattista ajattelua, joka kohdistuu avaruudellisiin suhteisiin. Koska käytän työssäni hyväksi GeoGebraa ja sitä myötä erilaisia kuvioita, perustuu oppiminen vahvasti näköhavaintoon. Tällöin puhumme visuo-spatiaalisesta ajattelusta (Silfverberg 1999). Tämä on tärkeä osa yläkoulun geometriaan liittyvässä ajattelussa, koska silloin oppiminen liittyy vahvasti mallikuvioiden tulkintaan ja niiden tuottamiseen. Oman työni yhtenä tavoitteena onkin luoda materiaalia, joka dynaamisten kuvien avulla kehittää oppilaiden visuo-spatiaalista ajattelua ja sitä myötä parantaa oppilaiden kykyä luoda myös omia mallikuvia.

Koulussa perinteisesti opiskellaan kuudesta trigonometrisestä funktiosta vain kolme: sini, kosini ja tangentti. Loput kolme ovat kotangentti, sekantti ja kosekantti. Yleensä trigonometrian opiskelu aloitetaan peruskoulun kahdeksannella tai yhdeksännellä luokalla, ja se jatkuu myös lukiossa niin pitkän kuin lyhyenkin matematiikan kursseilla (LOPS 2003). Erityisesti suorakulmainen kolmio on merkittävässä asemassa opiskeltaessa trigonometriaa peruskoulussa (Kolmio 2004). Silloin trigonometriset funktiot määritellään nimenomaan suorakulmaisessa kolmiossa ainoastaan teräville, positiivisille, kulmille. Lukiossa tätä määritelmää laajennetaan yli 90° ja negatiivisille kulmille. Tällöin mukaan tulevat asteiden sijaan radiaanit ja funktiot määritellään yksikköympyrässä. Lukiossa trigonometrisiä funktiota kuvataan myös koordinaatistossa, jonka jälkeen opiskellaan myös niiden analyyttisiä ominaisuuksia kuten nollakohdat ja derivointi. Trigonometristen funktioiden tarkat määritelmät, eli sarjakehitelmät, tulevat esiin vasta yliopistossa. Koulusta tutut ominaisuudet saavat perustelun vasta tässä vaiheessa, sillä näistä sarjakehitelmistä voidaan johtaa esimerkiksi derivoituvuus.

Trigonometriaan kuuluvia aiheita peruskoulussa ovat kolmioiden yhdenmuotoisuus, Pythagoraan lause ja trigonometristen funktiot. Nämä ovat oman työni aihealueet, joihin jokaiseen olen opetuspaketissani suunnitellut omia tutkimustehtäviä. Oppituntien järjestyksen olen valinnut eri oppikirjoja selailemalla sekä omassa opetusharjoittelussa käytetyn tavan perusteella. Kaikissa yläkouluissa trigonometrian aihealueita ei opeteta samalla kurssilla, vaan sen sisällöt saattavat olla hajautettuna eri vuosille. Parhaiten pakettini toteutus toimisi peräkkäin opetettuna, jolloin oppilaat pystyisivät nopeammin tottumaan uuteen työskentelytapaan ja näin muuttamaan toimintakulttuuriaan.

3.5 Trigonometria oman työni valossa

Kolmioiden yhdenmuotoisuuden tärkeänä pohjatietona on kuvioiden yhdenmuotoisuus: kaksi kuviota ovat yhdenmuotoisia, jos niiden vastinjanojen suhteet sekä vastinkulmat ovat yhtä suuret. Tärkeitä käsitteitä ovat vastinkulmat ja –sivut, sekä oppilaan on osattava laskea verrantoja. Yhdenmuotoisuuteen liittyvät usein myös mittakaava sekä pinta-alojen suhde. Pythagoraan lauseen sijainti trigonometrian opetuksessa vaihtelee hyvin paljon. Tämä johtuu ehkä siitä, että varsinaisia taustatietoja ei potenssilaskennan ja suorakulmaiseen kolmioon liittyvien käsitteiden lisäksi tarvita. Nämä käsitteet ovat suorakulma sekä suorakulmaisen kolmion sivujen nimet: kateetit ja hypotenuusa. Menetelmätietoon kuuluvat potenssiinkorotuksen ja neliöjuuren laskusäännöt sekä yhtälönratkaisu. Kolmioiden yhdenmuotoisuuden vaadittavat ominaisuudet on tärkeä pohjatieto siirryttäessä opiskelemaan trigonometrisia funktioita: kaksi suorakulmaista kolmiota ovat yhdenmuotoisia, jos niillä on yhtä suuri terävä kulma. Toisin kuin opetuspaketissani, trigonometrian opiskelu jaetaan monissa oppikirjoissa osiin, joissa sinin, kosinin ja tangentin avulla ensin harjoitellaan sivun ja sen jälkeen kulman ratkaisemista. Tämän jälkeen sivun ja kulman ratkaisemista yhdistellään ja sovelletaan kolmion ratkaisemista käsittelevässä kappaleessa. Jälleen suorakulmaisen kolmion osat on tärkeä tietää, sekä vielä tarkentaa niitä vastaisella ja viereisellä kateetilla. Yhtälönratkaisu on trigonometrisissä funktioissa merkittävässä roolissa. Osattaviin menetelmiin kuuluu myös laskimen käyttö. Kaikkia näitä opittavia asioita, kolmioiden yhdenmuotoisuus, Pythagoraan lause ja trigonometriset funktiot, sovelletaan usein pinta-alan laskemiseen. Käytännönläheisissä tehtävissä niitä käytetään esimerkiksi jonkin etäisyyden tai pituuden laskemiseen.

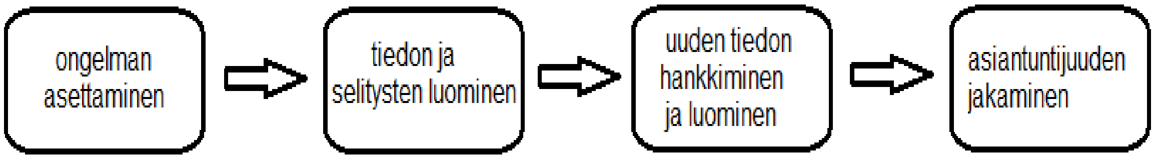
4 Yläkoulun trigonometriaa tutkivan oppimisen ja GeoGebran avulla

Tässä kappaleessa esittelen varsinaisen opetuspakettini. Aloitan selvittämällä opetuspaketin oppituntien rakenteen ja opetuksen toteutuksen (luvut 4.1 ja 4.2) sekä kerron yleisesti oppitunteihin liittyvistä GeoGebra-sovelmista (luku 4.3). Tämän jälkeen esittelen kunkin oppituntini sisällön erikseen: kolmioiden yhdenmuotoisuus (luku 4.4), Pythagoraan lause (luku 4.5) ja trigonometriset funktiot (luku 4.6). Kerron näissä kappaleissa myös oppituntien tehtävistä. Oppitunteja testattiin Helsingin yliopiston GeoGebra-kurssilla, joten viimeiseksi (luku 4.7) kerron oppituntien testauksen palautteista sekä esittelen kehitys- ja muutosideoita.

Konteksti pysyy koko paketin ajan samana, sillä opetettava luokka ei vaihdu ja kaikki aiheet kuuluvat trigonometrian opetukseen. Kuten aikaisemmin totesin, parhaiten opetuspakettini toteutus toimisi kaikki kolme aihetta peräkkäin opetettuna. Tällöin oppilaat tottuvat mahdollisesti uuteen työskentelytapaan, ja toimintakulttuurin muutos on helpommin saavutettavissa. Opetuspaketti toteutetaan koko ajan parin tai koko luokan kanssa yhdessä työskennellen. Tämä siksi, että tutkivassa oppimisessa yhdessä työskentely on merkittävässä osassa, jotta syntyisi jaettua asiantuntijuutta. Myös tieto- ja viestintätekniikan käyttö tukee parityöskentelyä erittäin hyvin, sillä käytettäessä TVT:tä ryhmätyössä, motivaatio ja keskustelu oppilaiden välillä kasvavat (OPH 2011). Toisin sanoen juuri ne samat asiat kasvavat, mitkä ovat myös tutkivan oppimisen tavoitteena.

4.1 Oppitunnin rakenne

Opetuspakettini oppituntien rakenne pohjautuu tutkivan oppimisen menetelmään (luku 2.2). Kuten teoriaosuudessa mainitsin, joitakin tutkivan oppimisen vaiheita voidaan tarvittaessa jättää pois ja siten kiinnittää huomiota vain joihinkin osa-alueisiin. Näin olen tehnyt omassa työssäni. Oppituntien rakenne koostuu seuraavasta neljästä vaiheesta: ongelman asettaminen, tiedon ja selitysten luominen, uuden tiedon hankkiminen ja luominen sekä asiantuntijuuden jakaminen (kuva 4).



Kuva 4. Oppitunnin rakenne

Opettajan asettama ongelma (vaihe 1) motivoi aiheen opiskeluun sekä auttaa oppilaita tiedon ja selitysten luomisessa (vaihe 2). Tässä vaiheessa opettaja johdattelee työskentelyä oikeaan suuntaan, esimerkiksi esittämällä tarkentavia kysymyksiä. Oppilaiden selitykset johdattelevat uuden tiedon etsintää. Tiedonhankintavaihe (vaihe 3) toteutetaan GeoGebra-sovelmilla, joiden pohjalta oppilaat luovat aiheesta teorian. Koska muita tiedonhankintaresursseja ei ole käytettävissä, opettajan tehtävä on lähinnä auttaa tarvittaessa. Oppilaiden luoma teoria jaetaan lopuksi koko luokan kesken (vaihe 4). Opettajan rooli, kuten tutkivassa oppimisessa yleensäkin, on merkittävin lopussa, tiedon jakamisen vaiheessa. Tällöin varmistetaan, että ongelman asettelun kannalta kaikki oleelliset asiat ovat tulleet esiin ja luotu teoria on ongelman selittämiseen sopiva. Tässä vaiheessa opettaja voi myös täydentää teoriaa tarvittavilla asioilla, kuten antamalla symbolin yhdenmuotoisuudelle tai kertomalla Pythagoraan lauseelle sen nimen.

4.2 Oppitunnin toteutus

Oppitunnin aluksi opettaja jakaa jokaiselle oppilaalle oman tehtäväpaperin. Jokaiselle oppitunnille on tehtäväpaperi, joka löytyy liitteistä. Varsinainen työskentely aloitetaan siis ongelman asettamisella (vaihe 1). Ongelma on esitetty kuvana vastauspaperissa ja tehtävänä on pohtia, miten se pystyttäisiin ratkaisemaan. Ensin ratkaisuehdotuksia pohditaan parin kanssa, jonka jälkeen tiedot ja selitykset luodaan koko luokan kanssa keskustellen (vaihe 2). Opettaja kokoaa ehdotuksia taululle ja tarvittaessa ohjaa selityksiä oikeaan suuntaan tarkentavilla kysymyksillä. Seuraavaksi oppilaat siirtyvät pareittain tietokoneille työskentelemään sovelmien pariin (vaihe 3). Opettaja voi ladata sovelmat oppitunnin suunnitteluvaiheessa esimerkiksi oppimisalustalle. Oppitunnit kannattaa numeroida samoin kuin sovelmat, jos niitä on useampi oppituntia kohti. Tehtäväpaperi kertoo minkä sovelman parissa milloinkin työskennellään. GeoGebran piirtoalustalle on numeroitu kysymyksiä joiden vastaukset kirjoitetaan tehtäväpaperin vastaavan numeron kohdalle. Opettaja ohjeistaa lukemaan huolella tehtävät ja kysymykset. Oppilaat etenevät tehtäväpaperin ja sovelmien mukaan, samalla opettaja kiertää luokassa auttaen tarvittaessa. Sovelmien pohjalta tehtyjen havaintojen perusteella oppilaat kokoavat tehtäväpaperiin oman teoriansa aiheeseen liittyen. Viimeiseksi tehtäväpaperista löytyy harjoitustehtävä, jossa oppilaat pääsevät soveltamaan keksimäänsä teoriaa. Tarvittaessa he voivat katsoa apua tehtäväpaperin lopusta löytyvästä esimerkkitehtävästä. Viimeisessä vaiheessa (vaihe 4) käydään tehtäväpaperin vastaukset läpi ja kootaan aiheen teoria koko luokan yhdessä keskustelemalla. Opettaja kirjoittaa taululle teorian oleellisimmat asiat sekä täydentää tarvittavilla asioilla. Hitaammat oppilaat voivat tehdä harjoitustehtävän vasta teorian läpikäymisen jälkeen, jolloin nopeimmille ei jää turhaa aikaa odotteluun. Jos oppitunnille jää aikaa, siirrytään oppikirjan tehtäviin tai muuhun työskentelyyn. Kunkin oppitunnin rakennetta, toteutusta ja sovelmia on kuvattu myöhemmissä luvuissa (luvut 4.4–4.6).

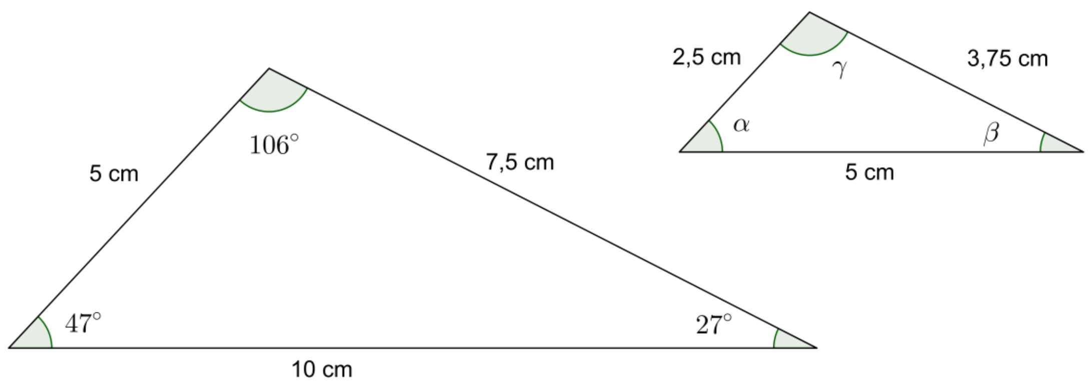
4.3 Alkuperäiset sovelmat

GeoGebralla tehdyt, dynaamisesti muunneltavissa olevat sovelmat ovat opetuspakettini tärkein osa. Kaikki nämä sovelmat ovat minun itseni suunnittelemia sekä tätä työtä ja tarkoitusta varten laadittuja. Dynaamisuuden ja vuorovaikutteisuuden ansiosta ne tukevat hyvin tutkivan oppimisen menetelmään. Sovelmien kehittelyssä TPACK-malli on toiminut vahvasti taustalla. Se auttaa minua kiinnittämään huomiota olennaiseen, esimerkiksi siihen miten kyseinen sovelma voisi auttaa hankalasti opittavien asioiden kohdalla. Valmiissa sovelmissa olen yrittänyt kiinnittää huomiota yksinkertaisuuteen muun muassa käyttämällä GeoGebran mahdollisuutta jättää vain tarvittavat työkalut näkyviin. Tehtäväpaperia olen selkeyttänyt tekemällä ohjepainikkeet GeoGebran piirtoalueelle. Tällöin ohjeistus sovelman kanssa työskentelyyn löytyy sovelmista eikä tehtäväpapereista. Janojen, pisteiden ja tekstien kokoa muuttamalla olen yrittänyt tehdä kuvista mahdollisimman selkeitä. Värien valinnalla olen pyrkinyt tuomaan ilmiön kannalta oleelliset yhteydet selvemmin näkyviin.

4.4 Oppitunti 1: kolmioiden yhdenmuotoisuus

Tehtäväpaperi tähän aiheeseen löytyy liitteestä 1. Lähdettäessä tutkimaan kolmioiden yhdenmuotoisuutta lähtöongelmaksi on opetuspaketissa valittu seuraava tilanne: on annettu kuva kahdesta kolmiosta, joista tiedetään sivujen pituudet sekä toisen kolmion kulmien suuruudet ja kysytään toisen kolmion kulmien suuruuksia (kuva 5).

Ongelma: Minkä suuruisia ovat kulmat α, β ja γ?

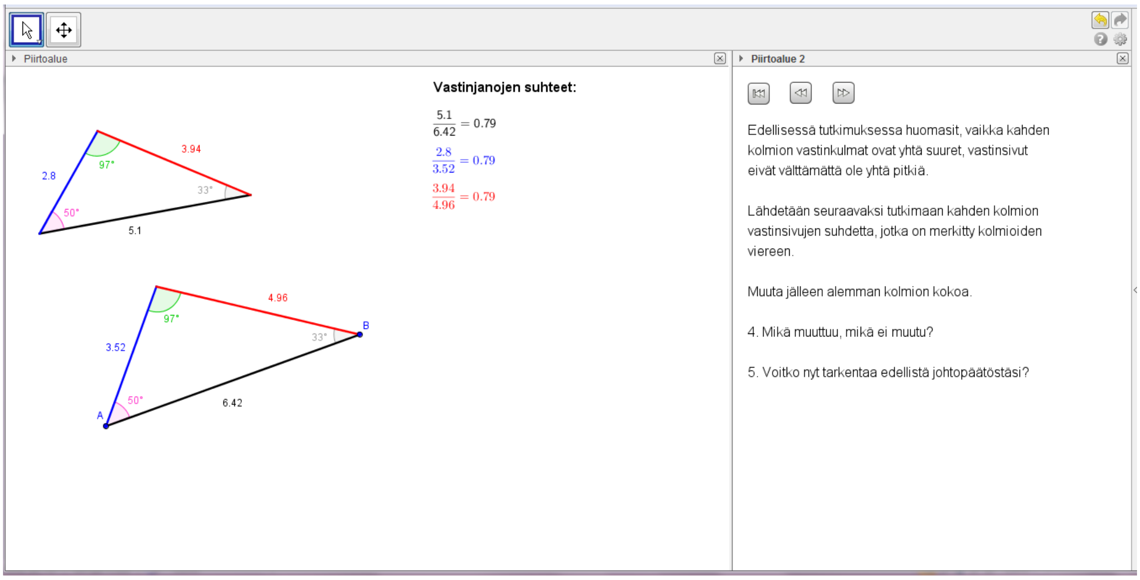


Kuva 5. Kolmioiden yhdenmuotoisuus: ongelman asettaminen

Ensimmäisessä vaiheessa oppilaat pohtivat parin kanssa, mitä kysymyksiä ongelma herättää, miten tehtävän kenties pystyisi ratkaisemaan tai minkälaisia teorioita tarvittaisiin, jotta ratkaisu löydetään. Toisessa vaiheessa opettaja kokoaa ehdotuksia taululle näkyviin. Oppilaat voisivat esimerkiksi ehdottaa seuraavanlaisia vastauksia:

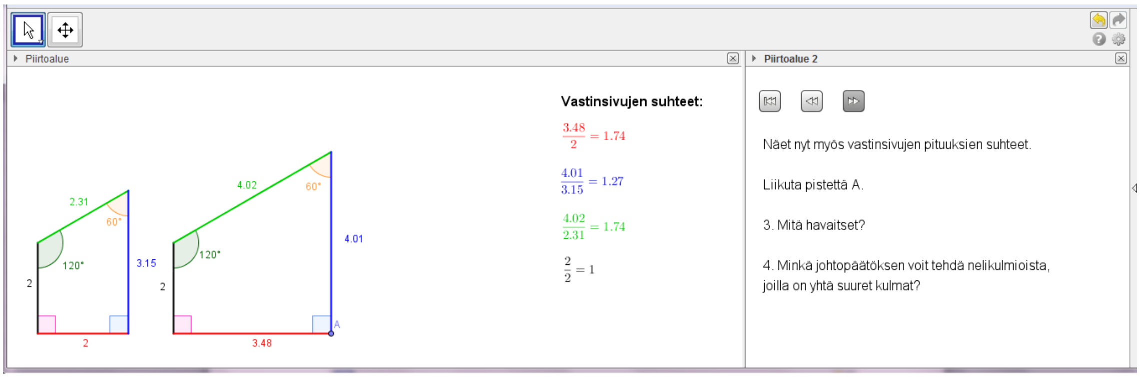
- Saako kolmion kulmien suuruuden selville sivujen pituuksien avulla?
- Ovatko kolmiot yhdenmuotoisia?
    - Opettaja voi myös johdatella tarkentamaan kysymystä:
    - ➔ Ovatko kolmiot yhdenmuotoisia, jos sivujen suhteet ovat samat?

Kolmannessa vaiheessa oppilaat siirtyvät työskentelemään pareittain GeoGebra-sovelmien pariin. Sovelmia on tällä oppitunnilla yhteensä neljä kappaletta. Ensin oppilaat tutkivat sovelmaa 1 (kuva 6), johon on piirretty kaksi kolmiota. Toisen kolmion kokoa pystyy muuttamaan niin, että kulmien suuruus säilyy. Näkyvillä ovat myös kolmioiden sivujen suhteet. Oppilaat tutkivat mitkä asiat muuttuvat ja mitkä eivät, kun toisen kolmion kokoa muutetaan. Näin he huomaavat, että suhteet pysyvät yhtä suurina toisiinsa nähden, koon muuttamisesta huolimatta.



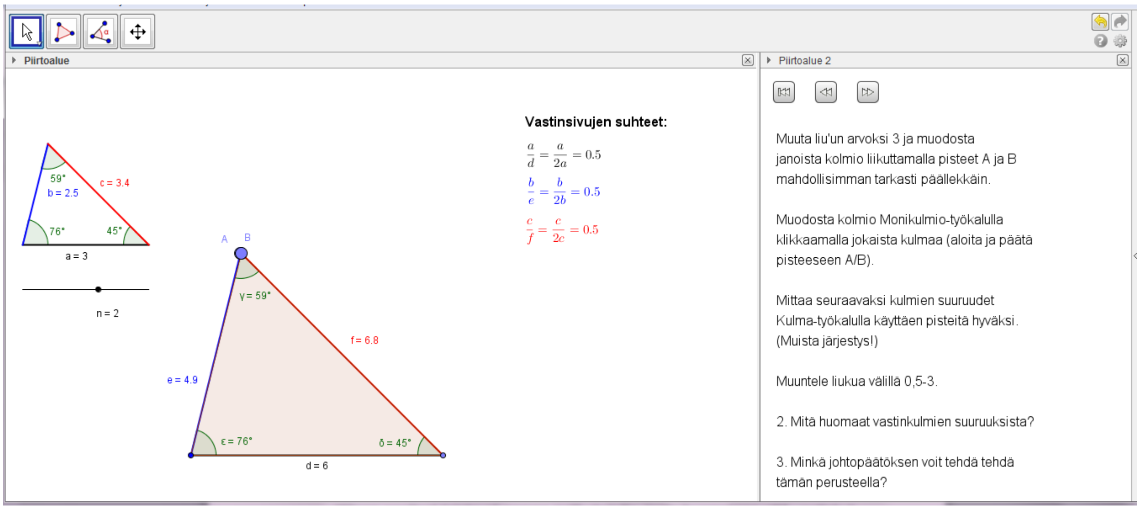
Kuva 6. Vastinjanojen suhteiden tutkiminen GeoGebra-sovelman avulla (Sovelma 1)

Sovelmassa 2 oppilaat tekevät samanlaisen tutkimuksen myös nelikulmiolla (kuva 7). Tällöin he huomaavat, ettei sama päde kaikilla kuvioilla.



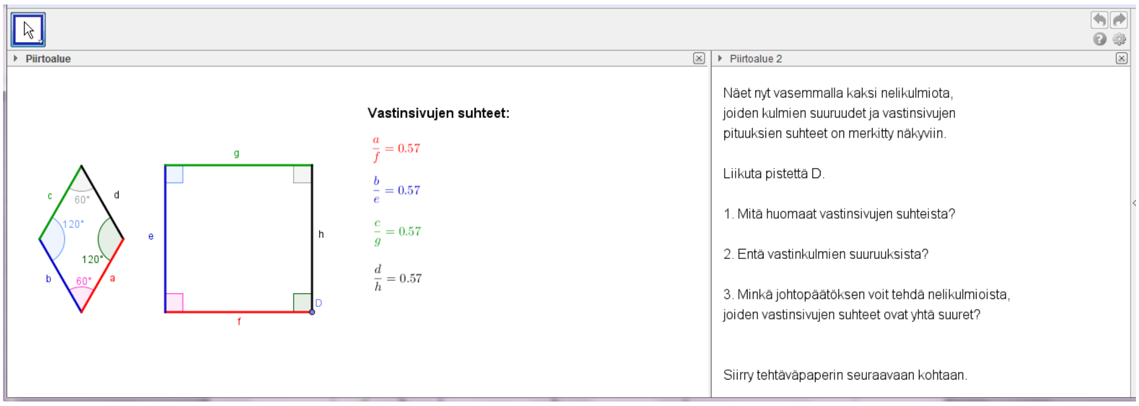
Kuva 7. Nelikulmioiden vastinjanojen tutkiminen GeoGebra-sovelman avulla (Sovelma 2)

Oppilaat tutkivat kolmioita myös toisin päin, niin että ensin nähdään sivujen suhteiden säilyvän. Sovelmassa 3 (kuva 8) on kuva kolmiosta ja kolme janaa, joiden pituuksia pystytään muuttamaan liuku-kytkimen avulla. Nämä janat ovat kolmion sivujen monikertoja, kerrottuna kaikki samalla luvulla. Näin ollen sivujen suhteen ovat yhtä suuret. Oppilaita pyydetään muodostamaan janoista kolmio, jolloin he huomaavat, että tämän pystyy tekemään vain yhdellä tavalla. Mitataan muodostuneen kolmion kulmat, jotta oppilaat huomaavat niiden olevan yhtä suuret kuin alkuperäisessä kolmiossa.



Kuva 8. Vastinkulmien suuruuksien tutkiminen GeoGebra-sovelman avulla (Sovelma 3)

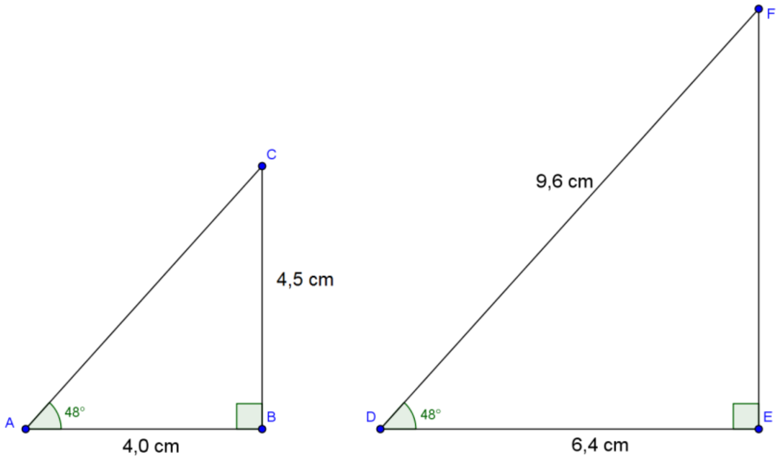
Sovelmassa 4 oppilaat jälleen toistavat saman nelikulmioilla (kuva 9). Tutkimus osoittaa, että vastinkulmat eivät ole yhtä suuret vaikka vastinsivujen suhteet ovat samat.



Kuva 9. Suunnikkaiden vastinkulmien tutkiminen GeoGebra-sovelman avulla (Sovelma 4)

Sovelmien perusteella oppilaiden tulee parinsa kanssa kirjoittaa teoriansa omin sanoin vastauspaperille. Tämän jälkeen oppilaat tekevät vastauspaperin lopusta löytyvän harjoitustehtävän (kuva 10), jossa he soveltavat juuri kirjoitettua teoriaa.

Tehtävä: Osaatko ratkaista puuttuvat kulmat? Entä puuttuvat sivut?



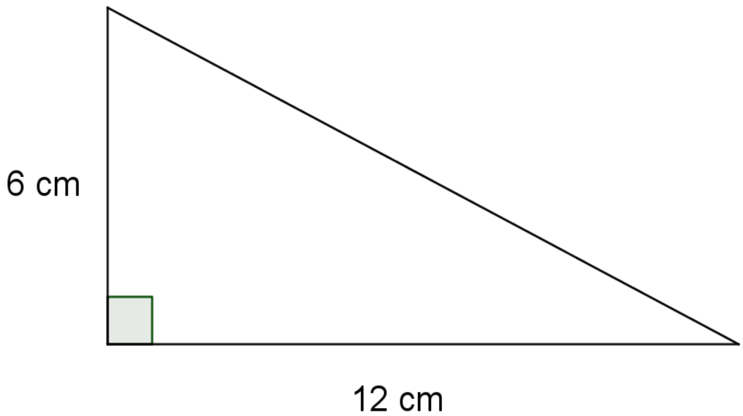
Kuva 10. Harjoitustehtävä, kolmioiden yhdenmuotoisuus

Lopuksi käydään vastaukset läpi ja kootaan opettajan johdolla aiheen yhteinen teoria taululle, jolloin oppilaat voivat tarvittaessa vielä tarkentaa omia johtopäätöksiään. Tämän jälkeen oppilaat jatkavat oppikirjan tehtäviin tai muuhun työskentelyyn, mikäli aikaa on jäljellä.

4.5 Oppitunti 2: Pythagoraan lause

Oppilaat alkavat nyt tutkia, miten suorakulmaisen kolmion sivujen pituudet liittyvät toisiinsa. Liitteestä 2 löytyy Pythagoraan lauseeseen liittyvä tehtäväpaperi. Aloitetaan ongelman asettamisella (kuva 11).

Ongelma: Laske kolmion piiri

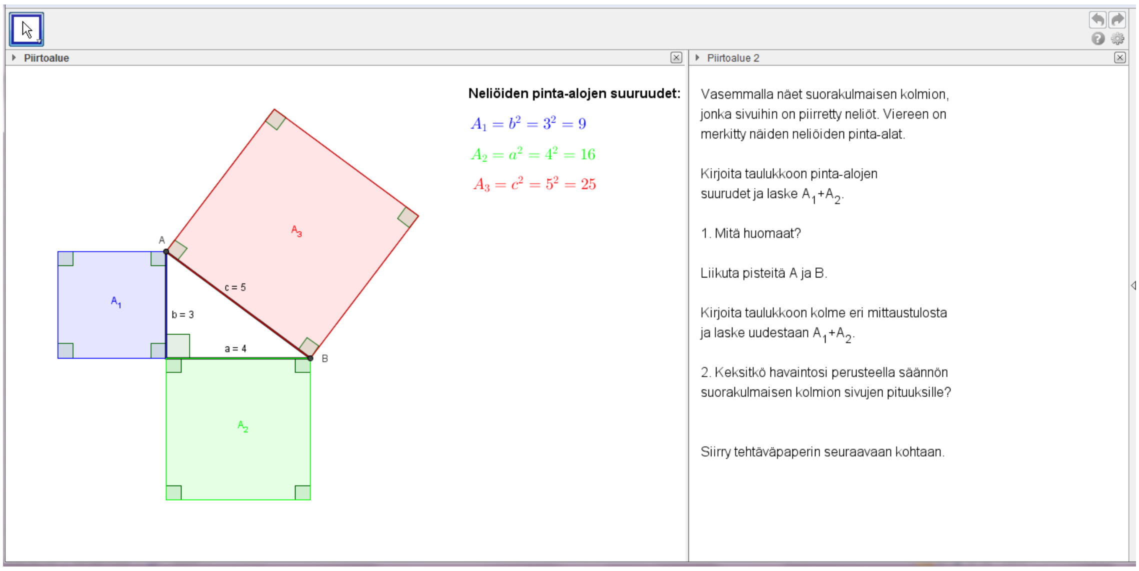


Kuva 11. Pythagoraan lause: ongelman asettaminen

Jälleen ensimmäisessä vaiheessa oppilaat pohtivat parin kanssa kysymyksiä ja mahdollisia teorioita, joista keskustellaan sitten koko luokan kesken. Esimerkiksi:

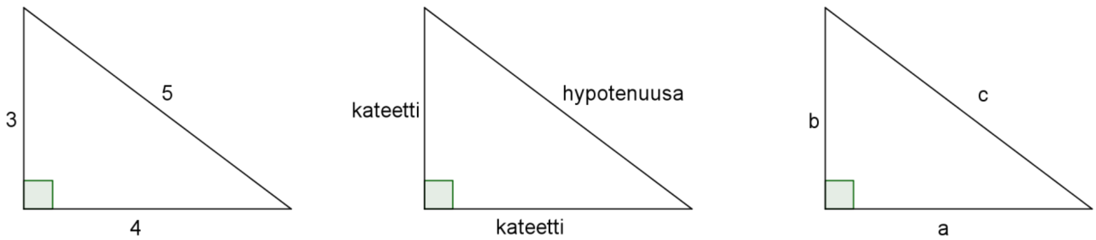
- Jos kaksi sivua tunnetaan, saadaanko kolmas laskettua niiden avulla?
    - Onko väliä mitkä sivut tunnetaan?
- Onko suorakulmalla merkitystä?

Seuraavaksi oppilaat alkavat tutkia sovelmaa (kuva 12), johon on piirretty suorakulmaisen kolmion jokaiselle sivulle neliö. Näkyviin on merkitty neliöiden pinta-alat. Oppilaat muuttavat kolmion kokoa, jolloin myös pinta-alat muuttuvat. He kirjaavat eri mittaustuloksia tehtäväpaperista löytyvään taulukkoon ja laskevat kateettien neliöt yhteen. Tämän perusteella oppilaiden pitää itse löytää yhteys kolmen pinta-alan välillä.



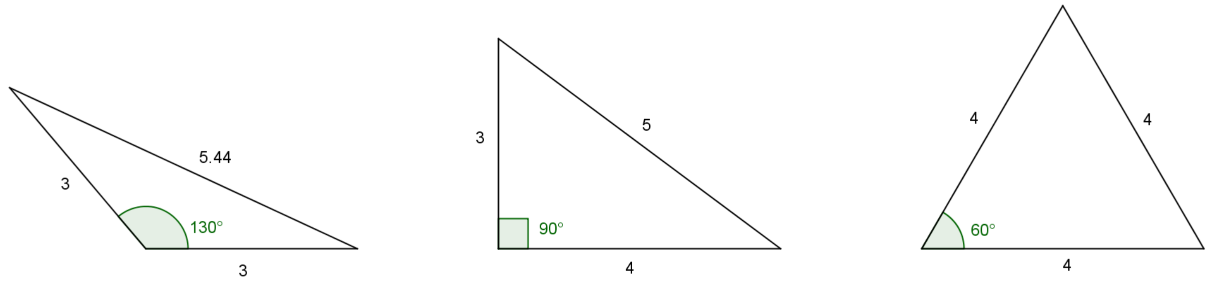
Kuva 12. Neliöiden pinta-alojen tutkiminen GeoGebra-sovelman avulla

Oppilaat kirjoittavat keksimänsä yhteyden näkyviin, ja soveltavat sitä kolmeen erilaiseen kolmioon (kuva 13): sivut merkitty numeroilla, sivujen nimet näkyvillä ja sivuja merkitty kirjaimilla.



Kuva 13. Pythagoraan lause eri muodoissa

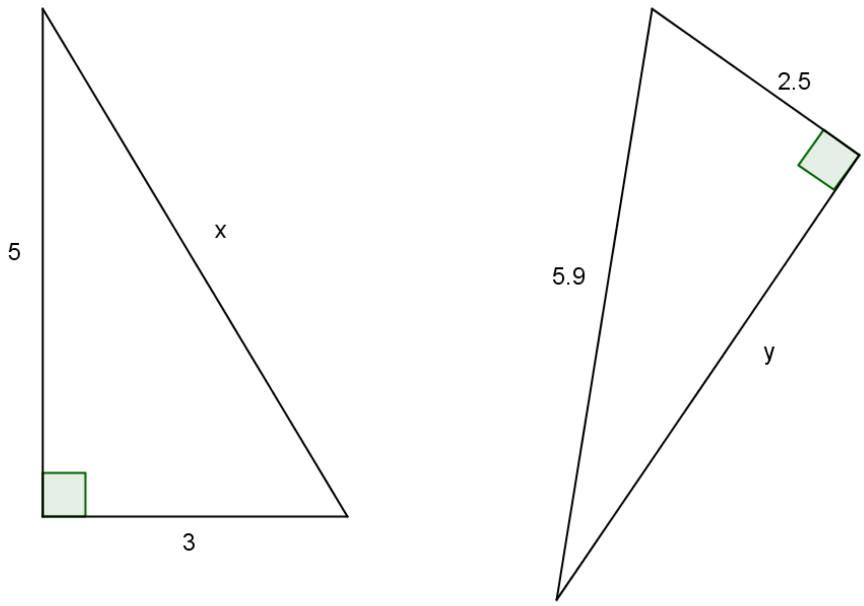
Oppilaat tutkivat vielä päteekö teoria kaikille kolmioille muutaman erilaisen kolmion avulla (kuva 14). Näin oppilaat voivat vielä tarkentaa teoriaansa.



Kuva 14. Erilaisia kolmioita

Viimeiseksi oppilaat ratkaisevat tehtävän (kuva 15) opittuun teoriaan liittyen.

Tehtävä: Ratkaise x ja y.



Kuva 15. Harjoitustehtävä, Pythagoraan lause

Työskentelyn lopuksi oppilaat käyvät opettajan johdolla vastaukset sekä keksimänsä teorian läpi ja opettaja kertoo kaavalle nimen Pythagoraan lause.

4.6 Trigonometriset funktiot

Tässä opetuspaketissani olen jakanut trigonometriset funktiot kolmeen oppituntiin: sivun ratkaiseminen sinin ja kosinin avulla (oppitunti 3), kulman ratkaiseminen sinin ja kosinin avulla (oppitunti 4) sekä tangentti (oppitunti 5) omana kokonaisuutena. Jokaisen oppitunnin tehtäväpaperit ovat liitteissä 3,4 ja 5.

4.6.1 Oppitunti 3: sivun ratkaiseminen

Ensin olisi hyvä kerrata suorakulmaisen kolmion osat ja tarkentaa niitä käsitteillä vastainen ja viereinen kateetti. Tämän voisi tehdä yksinkertaisella nimeämistehtävällä (kuva 16).

Kirjoita vastaavaa merkitsevän sivun kirjain nimen perään.

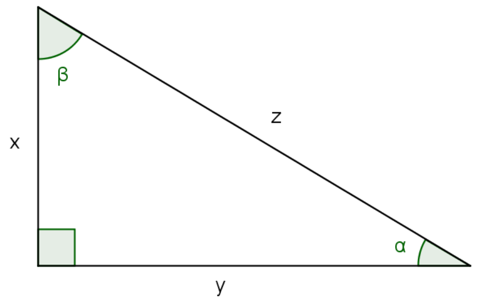
Kulman α vastainen kateetti ___

Kulman α viereinen kateetti ___

Kulman β vastainen kateetti ___

Kulman β viereinen kateetti ___

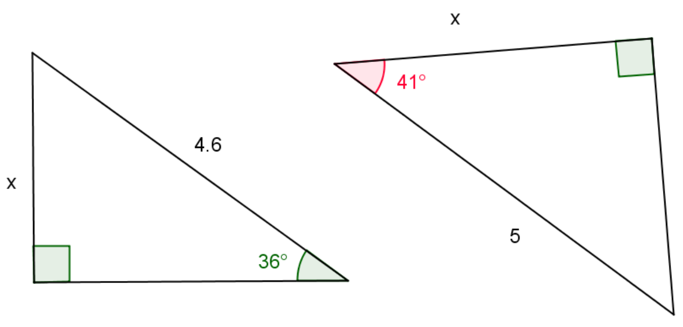
Hypotenuusa ___



Kuva 16. Suorakulmaisen kolmion osat

Aiheen opiskelu aloitetaan jälleen ongelmasta (kuva 17).

Ongelma: Ratkaise x molemmista kolmioista.

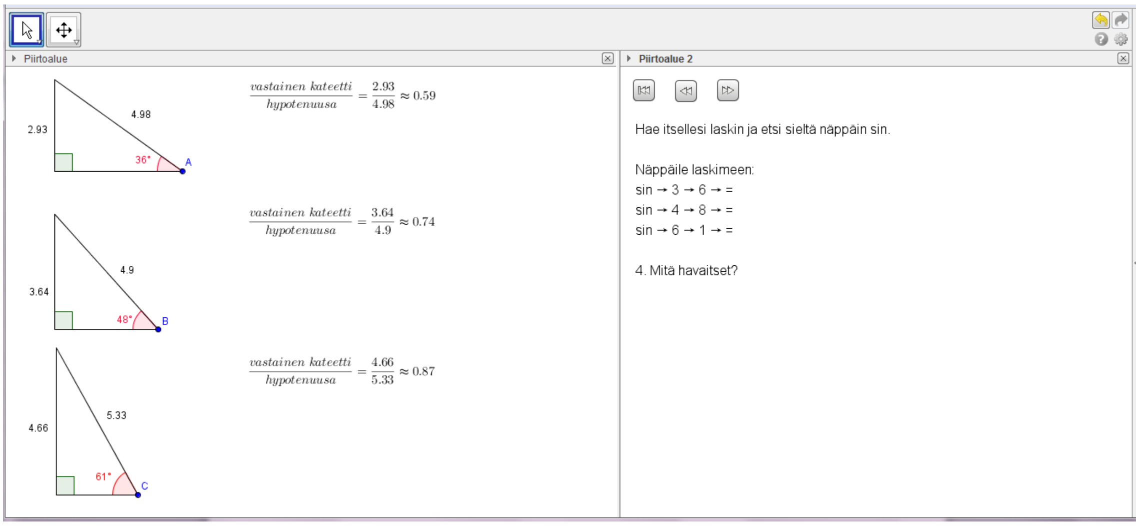


Kuva 17. Sivun ratkaiseminen: ongelman asettaminen

Opettajan johdolla tarkistetaan nimeämistehtävä sekä oppilaat kertovat ratkaisuehdotuksiaan ongelmaan. Mahdollisia esiin tulevia ehdotuksia:

- Tiedämme kolmion kaikki kulmat, voisimmeko piirtää yhdenmuotoisen kolmion ja ratkaista sen avulla?
- Onko kolmion sivuilla ja kulmilla jonkinlainen yhteys?

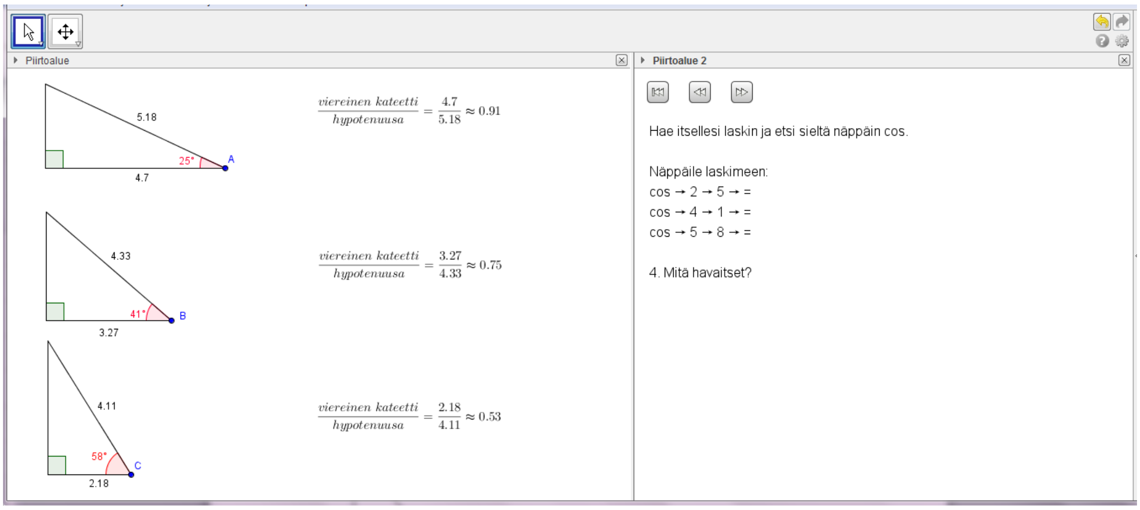
Aloitetaan ensimmäisestä kolmiosta. Tähän tehtävään liittyvään sovelmaan 1 (kuva 18) on piirretty kolme kolmiota, joiden kokoa pystyy muuttamaan yhtä kärkipistettä liikuttamalla. Jokaiseen kolmioon on merkitty toisen terävän kulman suuruus. Kolmioiden vieressä on laskettu merkityn kulman vastaisen kateetin ja hypotenuusan pituuksien suhde. Nyt oppilaat muuttavat kolmioiden kokoa ja katsovat mikä muuttuu, mikä ei muutu. Seuraavaksi heitä pyydetään hakemaan laskin ja etsimään sieltä näppäin sin. Oppilaat näppäilevät ensin laskimeen sin→3→6→=. Sama toistetaan myös kahden muun kolmion merkityllä astelu-vulla. Oppilaat kirjoittavat tämän jälkeen havaintonsa tehtäväpaperille.



Kuva 18. Kulman sinin tutkiminen GeoGebra-sovelman avulla (Sovelma 1)

Seuraavaksi oppilailta kysytään mitä tarkoittavat luvut sin 36°, sin 48° ja sin 61°, sekä pyydetään yleistämään tämä kulmalle α käyttämällä tunnin alussa tehtyä nimeämistehtävää apunaan.

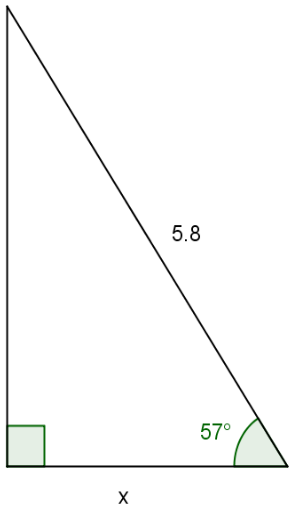
Oppilaat toistavat samanlaisen tehtäväsarjan myös kosinille sovelmassa 2 (ku-va 19). Näin he myös huomaavat, että sinin kohdalla sivujen suhde kasvaa ja kosinin kohdalla pienenee kulmaa suurennettaessa.



Kuva 19. Kulman kosinin tutkiminen GeoGebra-sovelman avulla (Sovelma 2)

Viimeiseksi oppilaat laskevat teoriaan liittyvän harjoitustehtävän (kuva 20).

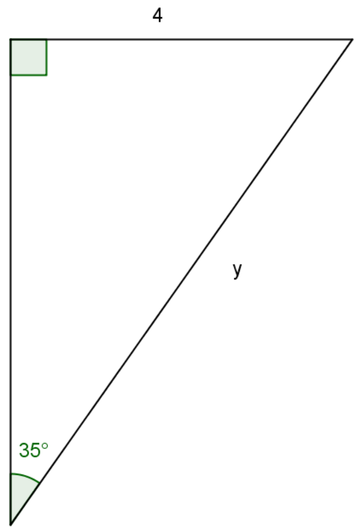
Tehtävä: Ratkaise x sinin ja kosinin avulla.



Kuva 20. Harjoitustehtävä, sivun ratkaiseminen

Tässä tehtävässä ei tiedetä kateetin pituutta, joten tuntematon arvo on osoittajassa. Useimmille oppilaille haastavampi versio on se missä hypotenuusaa ei tiedetä, jolloin nimittäjässä on tuntematon arvo. Oppilaat ratkaisevat vielä tämän tyylisen harjoitustehtävän (kuva 21).

Tehtävä: Ratkaise y.



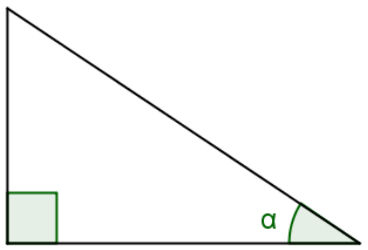
Kuva 21. Harjoitustehtävä, y nimittäjässä

Lopuksi oppilaat käyvät yhdessä opettajan kanssa vastaukset sekä teoriansa läpi ja siirtyvät oppikirjan tehtäviin.

4.6.2 Oppitunti 4: kulman ratkaiseminen

Seuraavalla oppitunnilla tutkitaan, miten suorakulmaisen kolmion kulmien suuruudet saadaan laskettua. Lähdetään taas ongelmasta liikkeelle (kuva 22).

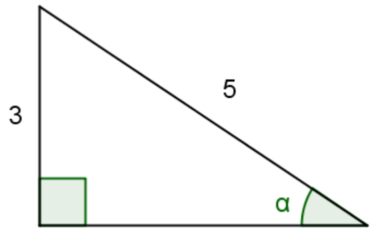
Ongelma: Ratkaise kulma α.



Kuva 22. Kulman ratkaiseminen: ongelman asettaminen

Oppilaat pohtivat ensin, saisivatko aikaisemman teorian pohjalta ratkaistua ongelman tai minkälaisia uusia teorioita ratkaisu vaatisi. Tarkennetaan seuraavaksi ongelmaa siten, että merkitään kahden sivun suuruus näkyviin (kuva 23).

Ongelma: Ratkaise kulma α.

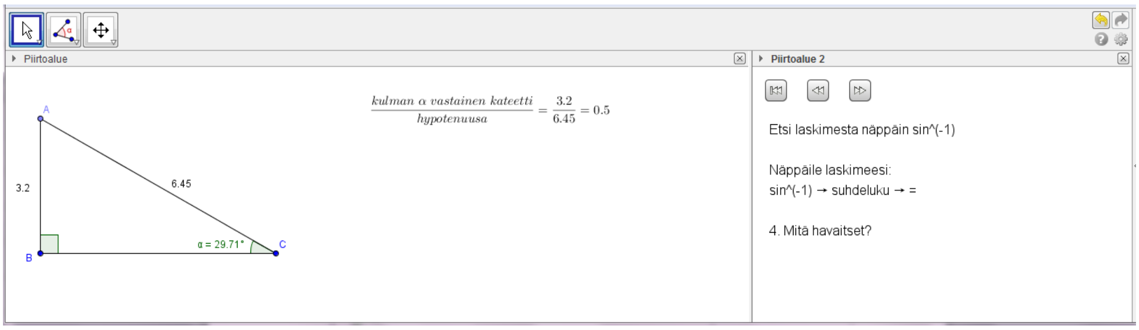


Kuva 23. Kulman ratkaiseminen kahden sivun avulla

Oppilaiden ehdotukset voisivat olla esimerkiksi:

- Koska sivut tunnetaan, voimmeko mitata yhdenmuotoisesta kolmiosta
- Aikaisemmin opimme yhtälön sivun suhteelle ja kulmalle, voiko sen avulla laskea kulman suuruuden

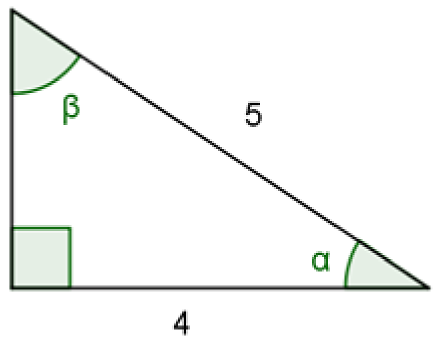
Oppilaat tutkivat sovelmalla (kuva 24) suorakulmaista kolmiota, jonka toisen terävän kulman suuruuden he mittaavat. Vieressä näkyy mitattua kulmaa vastaisen kateetin ja hypotenuusan suhde. Oppilaat palauttavat edelliseltä tunnilta mieleensä, mikä yhteys näillä on. Seuraavaksi he etsivät laskimestaan näppäimen $\sin^{-1}$, ja kirjoittavat siihen $\sin^{-1}$→ suhdeluku → =. Näin oppilaat huomaavat saavansa saman tuloksen kuin mitattaessa kulman suuruuden. Sama toistetaan kosinilla.



Kuva 24. Kulman laskemisen tutkiminen GeoGebra-sovelman avulla

Lopuksi vielä harjoitellaan keksittyä teoriaa harjoitustehtävän avulla (kuva 25).

Tehtävä: Ratkaise kulmat α ja β.



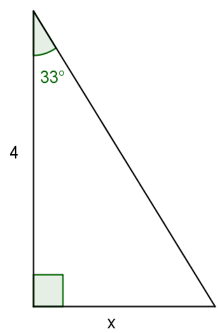
Kuva 25. Harjoitustehtävä, kulman ratkaiseminen

Tämän jälkeen käydään yhdessä koko luokan kanssa tehtävien vastaukset sekä opittu teoria läpi ja siirrytään kirjan tehtäviin.

4.6.3 Oppitunti 5: tangentti

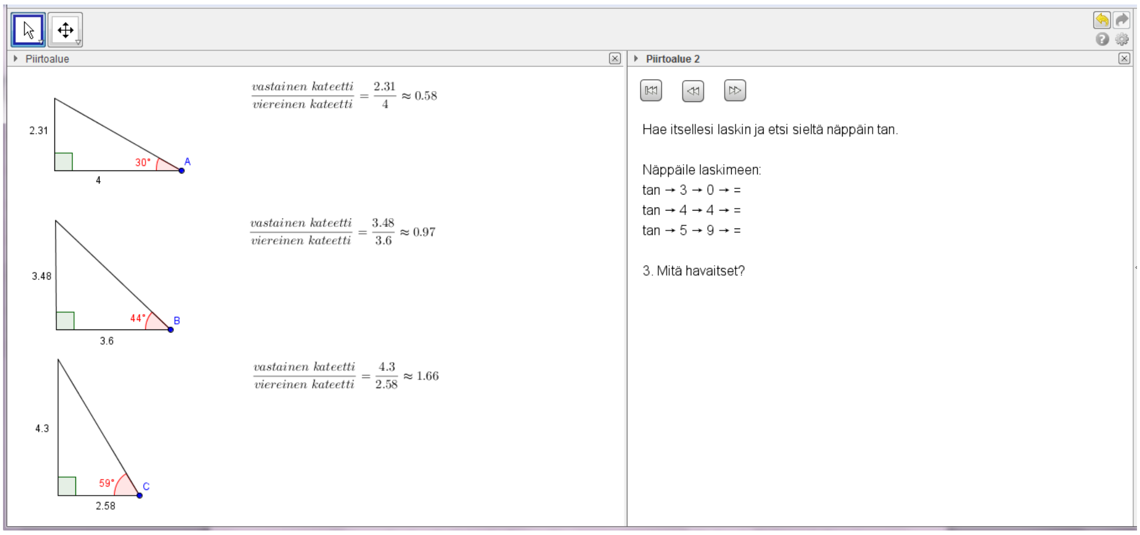
Aloitetaan tangentin opiskelu jälleen ongelmasta (kuva 26).

Ongelma: Ratkaise x.



Kuva 26. Tangentti, sivun ratkaiseminen: ongelman asettaminen

Oppilaat alkavat pohtia miten tehtävän saisi ratkaistua aiempien teorioiden pohjalta, käyttämällä kosinia hypotenuusan laskemiseen ja sen jälkeen Pythagoraan lausetta. Seuraavaksi siirrytään sovelman 1 (kuva 27) pariin, jossa tutkitaan kateettien suhdetta kulman suuruuteen samalla tavalla kuin sinin ja kosinin kohdalla. Oppilaat etsivät laskimesta näppäimen, jolla saadaan kateettien suhde selville kun kulma tiedetään.

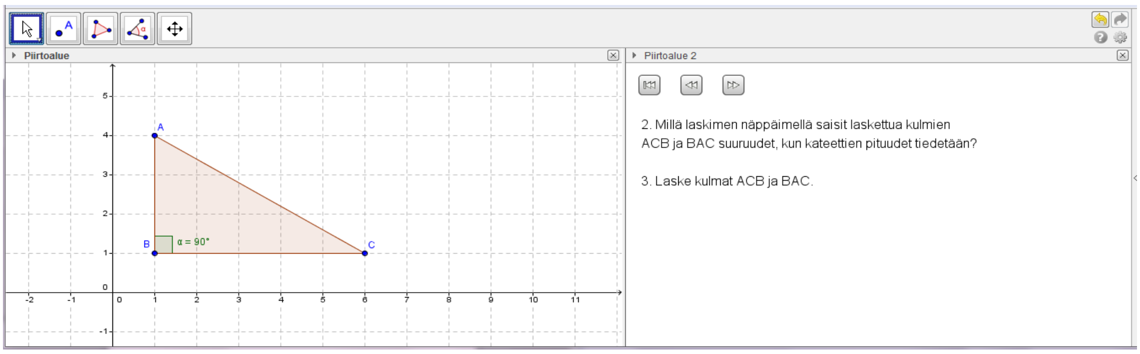


Kuva 27. Kulman tangentin tutkiminen GeoGebra-sovelman avulla (Sovelma 1)

Tämän jälkeen yleistetään tangentin kaava mille tahansa kulmalle α.

Nyt oppilaat ratkaisevat alkuperäisen ongelman uudella teorialla ja vertailevat vastauksiaan. Jos oppilas on aikaisemmin käyttänyt välissä pyöristettyä arvoa, tulokset luultavasti eroavat toisistaan. Näin ollen oppilaat näkevät hyödyn tangentin opiskelussa: välivaiheet ja sitä myötä virheen mahdollisuudet vähenevät.

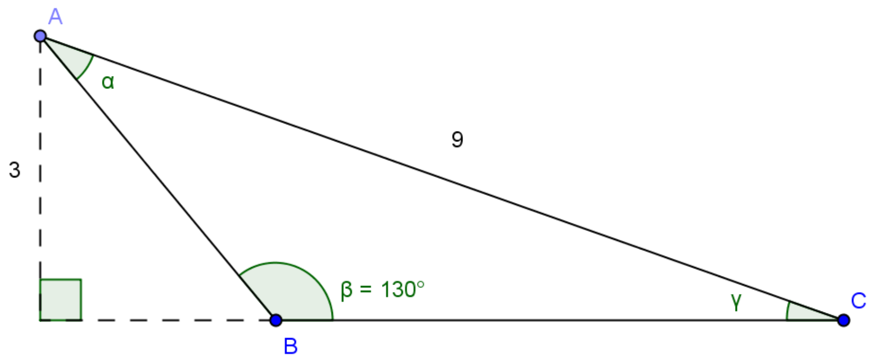
Oppilaat tutkivat seuraavaksi kulman ratkaisemista tangentin avulla. Sovelmassa 2 (kuva 28) heidän täytyy itse piirtää suorakulmainen kolmio annettujen koordinaattipisteiden avulla. Oppilaat etsivät aikaisempien tietojen perusteella laskimesta näppäimen, jonka avulla saadaan kulma selville, kun kateettien pituudet tunnetaan. Vastaukset tarkistetaan vielä GeoGebran Kulma-työkalun avulla.



Kuva 28. GeoGebra-sovelma kulman ratkaisemisesta tangentin avulla (Sovelma 2)

Lopuksi oppilaiden pitää vielä ratkaista harjoitustehtävän kolmiosta kaikki osat (kuva 29). Tehtävä kokoaa kulman ja sivun ratkaisemisen trigonometristen funktioiden avulla.

Tehtävä: Ratkaise kolmio ABC.



Kuva 29. Harjoitustehtävä, trigonometriset funktiot

Ennen kirjan tehtäviin siirtymistä, oppilaat käyvät opettajan johdolla vastaukset sekä keksimänsä teorian läpi.

4.7 Oppituntien arviointi ja kehitys

Oppitunteja testattiin Helsingin yliopiston aineenopettajille tarkoitetulla GeoGebra-kurssilla. Kurssilla oli 8 opiskelijaa ja aikaa yhteensä 60 minuuttia. Enimmäkseen opetuskokemusta opiskelijoilla ei juuri ollut. Myös aikaisempi GeoGebran käyttökokemus oli kaikilla osallistujilla vähäistä. Oppitunnit tehtiin yhdessä parin kanssa, yksi pari teki kaksi eri oppituntia. Opiskelijat kirjoittivat palautetta tehtäväpaperiin tehtävien ohella sekä varsinaiseen palautelomakkeeseen tunnin jälkeen. Palautelomake löytyy liitteestä 6. Kaikilta opiskelijoilta ei tullut omaa palautetta, vaan osa kirjoitti sen pareittain. Testauksen tavoitteena oli saada palautetta ja kehitysideoita oppituntien sisältöön.

4.7.1 Oppituntikohtaiset palautteet

Kolmioiden yhdenmuotoisuus on ehkä monimutkaisin oppituntikokonaisuus, koska se sisältää neljä eri sovelmaa. Ruuduilla on myös näkyvissä paljon tekstiä, kaavoja ja kuvia samaan aikaan, joten palautteessa toivottiin opettajan nostavat tärkeät asiat esille ja selittävän ne. Tämä toteutuu, kun luokassa käydään tehtäväpaperi yhdessä läpi. Oppitunti 1, sovelman 3 kaavoja toivottiin käännettävän toisin päin, jolloin ne vastaavat liu'un arvoja ja yhteys on näin ollen paremmin havaittavissa.

Pythagoraan lauseen mittauksista havaintaan, että pinta-aloilla on yhteys, mutta opiskelijat pohtivat onko tästä hankala havaita Pythagoraan lauseen sivujen neliöiden yhteys. Tämä voi vaatia opettajalta läpikäymisvaiheessa selvennystä, että sivujen neliön suuruus on yhtä suuri kuin suorakulmaisen kolmion sivuihin piirrettyjen neliöiden pinta-alat. GeoGebran pyöristys välillä väärensi pinta-alojen yhteyttä. Tehtäväpaperin vastausten perusteella lopun teoria olisi vaatinut omat kohtansa paperiin, johon koota kaikki tutkittu tieto.

Sivun ratkaiseminen sai kiitosta, että kokonaisuus toimi hyvin ja havainnollistaa hyvin tilannetta. Toisaalta, koska kosinin tutkiminen menee samalla kaavalla kuin sinin, opiskelijoiden mielestä osa oppilaista saattaa menettää mielenkiinnon. Laskimen näppäilyohjeet tuottivat trigonometristen funktioiden kohdalla mietintöjä merkinnöistä, esimerkiksi pitäisivätkö sovelmissa ja tehtäväpaperin työskentelyohjeissa käytetyt nuolet jättää osittain tai kokonaan pois. Myös muutosta tehtävien järjestykseen ehdotettiin: olisiko parempi antaa malliksi yksinkertainen perustehtävä ja antaa oppilaiden ratkaista soveltava tehtävä.

Opiskelijat pohtivat laskimien ongelmaa myös kulman ratkaisemisen tehtävissä. Tällä kertaa palautteessa kirjoitettiin, etteivät kaikki laskimet vastaa sovelman ohjeita, sillä joissakin laskimissa näppäillään ensin suhdeluku ja sitten vasta $\sin^{-1}$. Tehtäväpaperissa opiskelijat kiinnittivät huomiota joidenkin kysymysten asetteluun ja sananvalintoihin.

Viimeisen oppitunnin, tangentin, kohdalla palautteesta nousi sama laskinpohdinta kuin aikaisemminkin. Harjoitustehtävän tehtävänanto vaatii selkeästi tarkennusta: tehtävästä oli ratkaistu vain kulmat, jolloin ei edes tarvita tangenttia ratkaisemiseen.

4.7.2 Yleinen palaute

Oppitunneista saadun palautteen perusteella voidaan todeta, että opettajan tuen merkitys koetaan valitussa työskentelytavassa tärkeäksi. Ensinnäkin selkeät aloitusohjeet, tämän jälkeen avustaminen ja neuvominen sovelmia tutkiessa, lopuksi tehtävien läpikäynti sekä tarvittavien tietoja esiintuonti ovat opettajan merkittävimmät tehtävät opetuspaketin toteutuksen aikana. Tämä ei sinänsä ole yllättävää, sillä jo tutkivan oppimisen teoriassakin todettiin, että opettajalla on ratkaiseva rooli onnistumisessa. Selkeä suullinen ja kirjoitettu ohjeistus auttaa sekä opettajan että oppilaan työskentelyä huomattavasti. Palautteessa todettiin yleisesti myös, että kirjoitettua ohjeistusta voisi paikoittain selkeyttää. Jonkin verran uskottiin sujuvan työskentelyn sovelmien parissa edellyttävän aikaisempaa käyttökokemusta GeoGebrasta. Selkeä ohjeistus varmaan helpottaisi tässäkin asiassa.

Osa oppituntikohtaisista ongelmista johtui luultavasti siitä, että tehtiin vain yksittäinen oppitunti. Jos kaikki olisivat tehneet samaa oppituntia, rakenne olisi varmasti tullut selkeämmin esiin ja opiskelijoille olisi ollut selvempää, mitä jo tiedämme aikaisempien tuntien pohjalta. Myös tehtävien yhteinen läpikäynti olisi varmasti auttanut hahmottamaan paremmin oppitunnin rakennetta.

Varsinainen työskentelytapa, tutkiva oppiminen ja TVT, aiheuttivat mielipiteitä puolesta ja vastaan: Osassa palautetta uskottiin, että tällainen työskentely voisi motivoida oppilaita paremmin verrattuna opettajajohtoiseen liitutaulutyöskentelyyn. Toisaalta oppilaiden toimintaa tietokoneilla on yleensäkin seurattava, sillä osa saattaa harhautua tekemään jotain aivan muuta kuin mitä olisi tarkoitus. Yksi palautteenantaja kirjoitti jopa, että peruskoulussa ei tällaista opetusmuotoa käyttäisi, koska opettajajohtoisuus toimii paremmin ja on riski päästää yläkoululaiset tietokoneluokkaan. Negatiivinen palaute saattaa myös kertoa siitä, että opetuskulttuuri on jähmeää ja varsinkin peruskouluun liittyy paljon ennakko-odotuksia. Oppilaan omaa pohdintaa, ajattelua ja keksimistä palautteissa kannatettiin. Todettiin muun muassa, että tällä tavalla opetettaessa asiat voitaisiin ymmärtää paremmin, kuin ulkoa opettelemalla.

4.7.3 Kehitysajatukset ja muutokset

Kysymysten ja tehtävänantojen asettelut vaativat varmasti eniten työstöä. Joissakin oppitunneissa kysymykset voisivat olla jopa selkeämmin johdattelevia. Tehtävänantoja voisi sen sijaan jaotella vielä enemmän erillisiksi kohdiksi. Lisäämällä ohjetekstien määrää sovelmissa, kirjoituksen määrä yksittäisessä ohjeessa vähenisi. Varsinaiset sovelmien kuvat pysyvät varmasti suurin piirtein tällaisina, muutamaa kuvassa olevan kaavan muutosta lukuun ottamatta. Myös sivun laskemista kosinin avulla voisi pohtia täysin uudestaan. Näin ollen se saataisiin eroamaan enemmän sinin tutkimisesta ja pitäisi paremmin oppilaan mielenkiinnon yllä.

Harjoitus- ja esimerkkitehtävien toimivuus selviää paremmin vasta oppilailla testauksen jälkeen. Työskentelyjärjestystä on helppo vaihtaa toisin päin, ja tällä tavalla testata onko oppilaista mielenkiintoisempaa tehdä heti soveltavia tehtäviä vai tuottavatko ne alkuun liian suuria haasteita. Myös ylipäätänsä kysymysten asettelu ja ohjeistus selkeytyvät varmasti käytön myötä. Tehtäväpapereihin on hyvä lisätä sivunumerot, jotta eteneminen oikeassa järjestyksessä helpottuu. Kaiken kaikkiaan perusajatus tutkimisesta ja itse oivaltamisesta näiden sovelmien pohjalta toimii, mutta selkeyteen on syytä kiinnittää paljon huomiota. Sovelmia ja tehtäväpapereita tulen muuttamaan saadun palautteen perusteella, mutta parannukset eivät ehdi valmistua vielä tämän työn palautukseen mennessä.

5 Pohdintaa

Tässä kappaleessa pohdin miten voisin työtäni kehittää jatkossa ja mitä asioita tätä opetuspakettia toteuttaessa voisi tutkia. Kerron myös miten sitä voisi soveltaa esimerkiksi muiden asioiden opetukseen. Pohdin myös minkälainen vaikutus tällä tutkielmalla on omaan opettajuuteni.

5.1 Jatkoa työlleni

Olen tehnyt tässä tutkielmassa opetuspaketin ja se on tarkoitettu otettavaksi käyttöön tulevassa opettajatyössäni. Olisi mielenkiintoista tutkia yksityiskohtaisesti oppilaiden työskentelyä opetuspaketin parissa. Esimerkiksi voisi toteuttaa laadullisen tutkimuksen siitä, muuttuuko oppilaiden kiinnostus tai motivaatio tällä tavalla opetettaessa ja miten he kokivat oppineensa asiat. Sen sijaan oppimistuloksia voi olla hankala määritellä ilman määrällistä tutkimusta ja vertailuryhmää. Parityöskentelyä olisi kiinnostavaa videoida ja analysoida, mitä työskentelyn aikana tapahtuu, sillä sanallinen keskustelu on tärkeä osa ajatusprosessin ilmentymistä. Tämä toisi hyvin esiin tutkivan oppimisen puolta opetuspaketissa. Tavoitteenani on toteuttaa opetuspaketti opetustilanteessa ja sen pohjalta kehittää sovelmia tarpeen mukaan. Ohjeistuksen ja kysymystenasettelun selkeydestä saa varmasti oppilaiden kanssa heti palautetta avun tarpeen määrässä. Ohjeita ja kysymyksiä on helppo kehittää kokemuksen myötä, aivan kuten opetuksessa yleensäkin.

Tutkielmassa käytettyä mallia voisi laajentaa myös muihin aihealueisiin. GeoGebra soveltuu erinomaisesti esimerkiksi funktioiden opiskeluun. Samalla TPACK-kehyksellä voi kehittää toisenkin opetuspaketin. Oppilaat voisivat myös itsenäisesti tutustua koordinaatistoon GeoGebran avulla ilman, että heille on opetettu aiheesta mitään. He pystyisivät poimimaan esimerkiksi akselien nimet ja pisteiden merkitsemisen. Tähän ei opettajan tarvitse edes tehdä valmista kuvaa vaan voi antaa oppilaan kokeilla GeoGebran piirtoaluetta. Käyttämällä erilaisia teknologioita ja opetusmenetelmiä oppitunneilla, opettaja pystyy hieman muuttamaan perinteisiä opetusmalleja.

5.2 Merkitys omaan opettajuuteeni

Vähäisen opetuskokemuksen myötä minulle ei ole vielä muodostunut selkeää rutiinia siitä, miten opetan. Tämä tutkielmani varmasti innostaa minua kokeilemaan erilaisia opetusmenetelmiä perinteisen opettajajohtoisen opetuksen sijaan. Lähestymistapoja opettamiseen on monia, mutta ennen kaikkea tässä tutkielmassani minua innostaa ajatus rohkaista oppilaita omaan oivaltamiseen myös varsinaisen teorian kanssa eikä vain tehtäviä tehdessä.

Tämä tutkielmani vahvisti myös käsitystäni TPACK-mallin toimivuudesta. Sisältö, pedagogiikka ja teknologia pelaavat selkeästi hyvin yhteen ja TPACK-malli toimii hyvänä tukena huomioimaan nämä eri osa-alueet. Toivon käyttäväni teknologiaa mahdollisimman paljon ja monipuolisesta tulevaisuudessa hyödyksi, ettei aina turvautuisi pelkkään liitutauluun tai dokumenttikameraan. GeoGebra tuli tämän työn kautta entistä tutummaksi ja koen, että valmiudet käyttää sitä opetuksen tukena kasvoivat entisestään. On myös olemassa monia muitakin tietokonesovelluksia, joista on omat hyötynsä erilaisia asioita opetettaessa. Tulevaisuuden haasteina koenkin löytää niitä sekä ennen kaikkea rohkeasti opetella sovellusten käyttöä ja totuttaa myös oppilaat uusiin opetusmenetelmiin.

Lähteet

Gonzalez, J. (2013). *My Journey With Inquiry-Based Learning*. Journal on Excellence in College Teaching, 24 (2), p33-50.

Hakkarainen, K., Ilomäki, Järvelä, S., L., Lakkala, M., Lehtinen, E., Lipponen, L., Muukkonen, H. & Rahikainen, M. (1999). *Tieto- ja viestintätekniikka tutkivan oppimisen välineenä.* Helsinki: Multiprint.

Hakkarainen, K., Lonka, K. & Lipponen, L. (2004). *Tutkiva oppiminen: järki, tunteet ja kulttuuri oppimisen sytyttäjinä.* Helsinki: WSOY.

Hähkiöniemi, M (2011). *GeoGebra-avusteinen tutkiva matematiikka opetusharjoittelussa – Tutkimuksia opettajan ja oppilaiden toiminnasta.* https://jyx.jyu.fi/dspace/bitstream/handle/123456789/37131/978-951-39-4623-4.pdf (19.11.2013)

Hähkiöniemi, M. & Leppäaho, H. (2010). Matematiikan aineenopettajaksi opiskelevien valmiudet ohjata opiskelijoita GeoGebra-avusteisissa tehtävissä. http://epublications.uef.fi/pub/urn_isbn_978-952-61-0266-5/urn_isbn_978-952-61-0266-5.pdf (26.9.2013)

International GeoGebra Institute, www.geogebra.org

Jaakkola E., Latva O., Nieminen H., Tolvanen A. & Tuomaala T. (1997). *KOLMIO. Matematiikan tietokirja*. Jyväskylä: Kirjayhtymä Oy.

Koehler, M. J. & Mishra, P. (2006). *Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge*. Teachers College Record. Vol.108 Number 6, p1017-1054

Koehler, M. J. (editor), TPACK Academy, http://tpack.org (17.6.2013)

LOPS (2003). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003*. Helsinki: Opetushallitus.

Luoma-Aho, E. (2010). Matematiikan historia aihealueittain. Luku 3. http://solmu.math.helsinki.fi/2010/kasitehist/Trigonometria.pdf (13.8.2013)

Metsämuuronen, J. (2013). *Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012*. Helsinki: Opetushallitus.

Niess, M. L., Ronau, R.N., Shafer, K.G., Driskell, S. O., Harper, S. R., Johnston, C., Browning, C., Özgün-Koca, S. A. & Kersaint, G. (2009). *Mathematics Teacher TPACK Standards and Development Model. Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*. Online serial. http://www.citejournal.org/vol9/iss1/mathematics/article1.cfm (23.9.2013)

Nilson, L. B. (2003). *Teaching at Its Best – a Research-based Resource for College Instructors*. Anker Publishing Company, Inc. United States of America.

OECD (2004). *Pisa 2003, Learning for Tomorrow's World.* OECD Publishing, Paris.

POPS (2004). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004*. Helsinki: Opetushallitus.

Rautopuro, J. (2013). *Hyödyllinen pakkolasku – Matematiikan oppimistulokset peruskoulun päättövaiheessa 2012.* Helsinki: Opetushallitus. http://www.oph.fi/download/147904_Hyodyllinen_pakkolasku.pdf (22.8.2013)

Samuel, D. F. (2013). *St. Lucian Elementary School Teacher's Applicability Beliefs and Beliefs about Science Teaching and Learning: Relevance to Their Level of Inquiry-Based Instructional Practices in Science*. International Education Studies. Vol.6 Issue 7, p48-65.

Silfverberg, H. (1999). *Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto*. Acta Electronica Universitatis Tamperensis, 710. Saatavissa: http://urn.fi/urn:isbn:951-44-4718-2

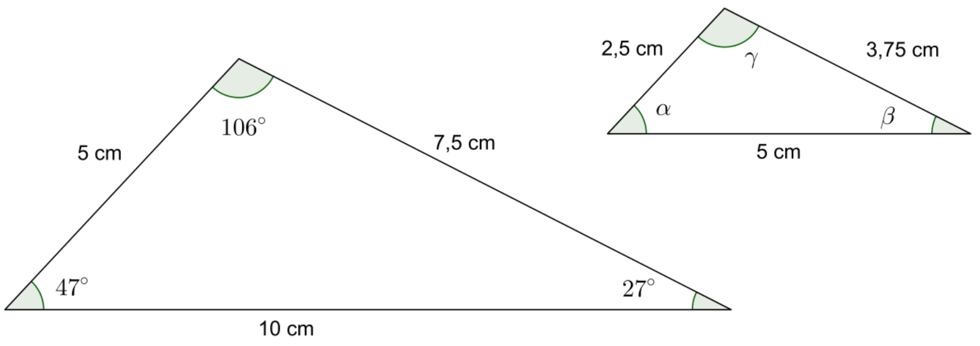
Tilannekatsaus (2011). *Tieto- ja viestintätekniikka opetuskäytössä – välineet, vaikuttavuus ja hyödyt*. Helsinki: Opetushallitus.

Ylioppilastutkintolautakunnan hanke, http://digabi.fi/doku.php

Liitteet

Kolmioiden yhdenmuotoisuus: LIITE 1 (1)

Ongelma: Minkä suuruisia ovat kulmat α, β ja γ?



Miten tehtävän voisi ratkaista? Voitko käyttää aikaisempia teorioita hyödyksi? Tarvitaanko uusia teorioita? Jos tarvitaan, niin minkälaisia?

Siirry sovelman 1 pariin.

Havainnot:

1.

2.

3. Johtopäätös:

4.

5. Johtopäätös:

Siirry sovelman 2 pariin.

Havainnot:

1.

2.

3.

4. Johtopäätös:

Koskeeko kolmioille tekemäsi johtopäätös myös nelikulmioita?

Siirry sovelman 3 pariin.

Havainnot:

1.

2.

3. Johtopäätös:

Siirry sovelman 4 pariin

Havainnot:
1.

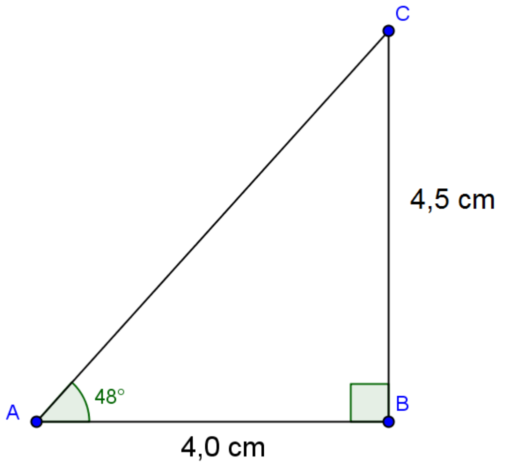
2.

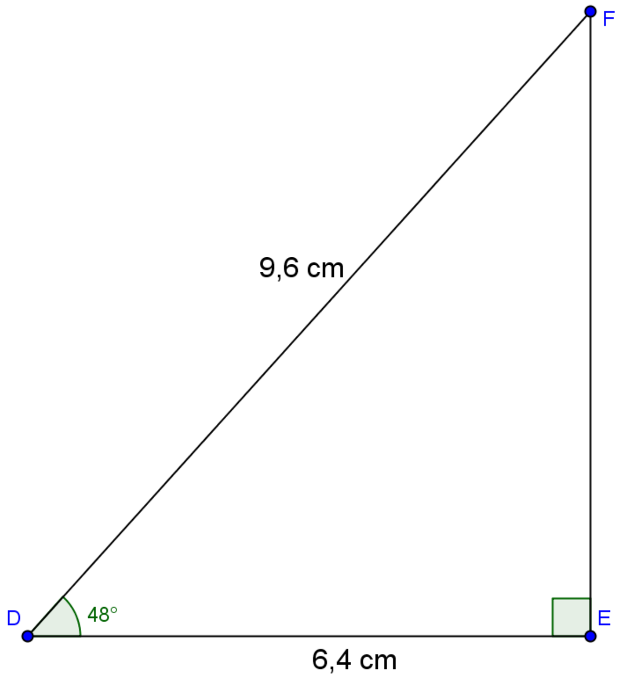
3. Johtopäätös:

Koskeeko kolmioille tekemäsi johtopäätös myös nelikulmioita?

Minkä teorian voit luoda havaintojesi perusteella kolmioiden yhdenmuotoisuudesta?

Tehtävä: Osaatko ratkaista puuttuvat kulmat? Entä puuttuvat sivut?
(Apua tarvittaessa löydät kääntöpuolelta)





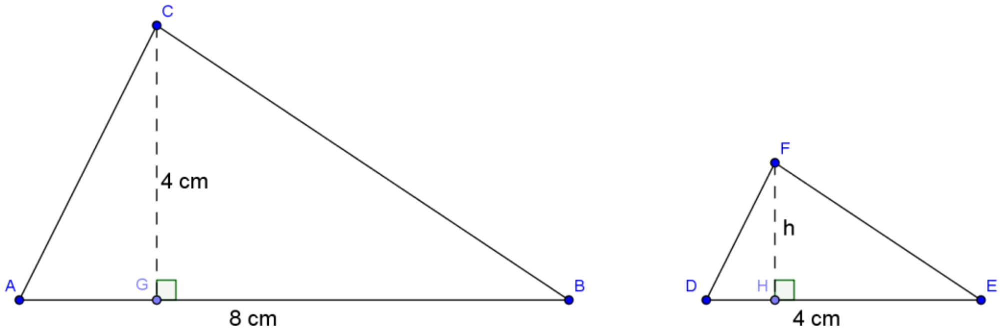
LIITE 1 (4)

Kolmiot ABC ja DEF ovat yhdenmuotoisia. Laske kolmion DEF pinta-ala.

$\Delta ABC \sim \Delta DEF \ \Rightarrow \angle CBG = \angle FEH$

$\Rightarrow \Delta BCG = \Delta EFH$

$\Rightarrow \frac{h}{4} = \frac{EF}{BC} = \frac{4}{8}$



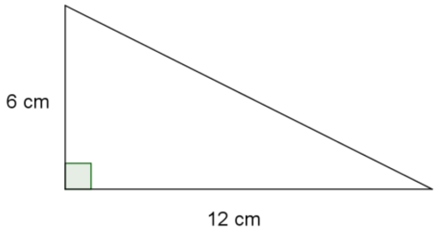
$8h = 4 \cdot 4$

$8h = 16$

$h = 2$

$\Rightarrow A = \frac{2 \cdot 4}{2}$
$= 4\ (cm^2)$

Pythagoraan lause:
Ongelma: Laske kolmion piiri.



Miten tehtävän voisi mahdollisesti ratkaista? Minkälaisia teorioita tehtävän ratkaisemiseksi tarvitaan?

Siirry sovelman pariin.
Havainnot:

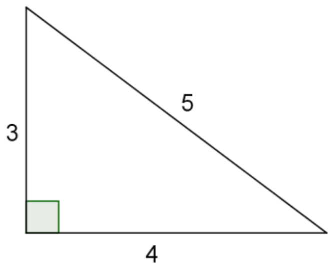
A_1	A_2	A_3	$A_1 + A_2$

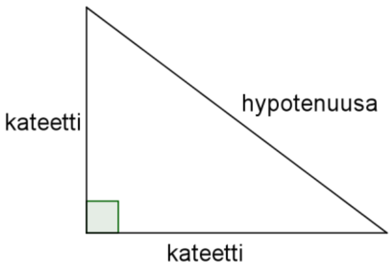
1.

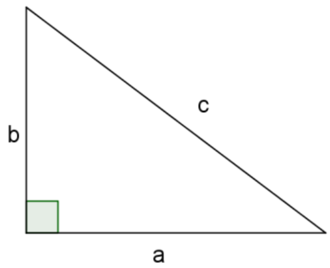
	A_1	A_2	A_3	$A_1 + A_2$
Mittaus 1				
Mittaus 2				
Mittaus 3				

2. Sääntö:

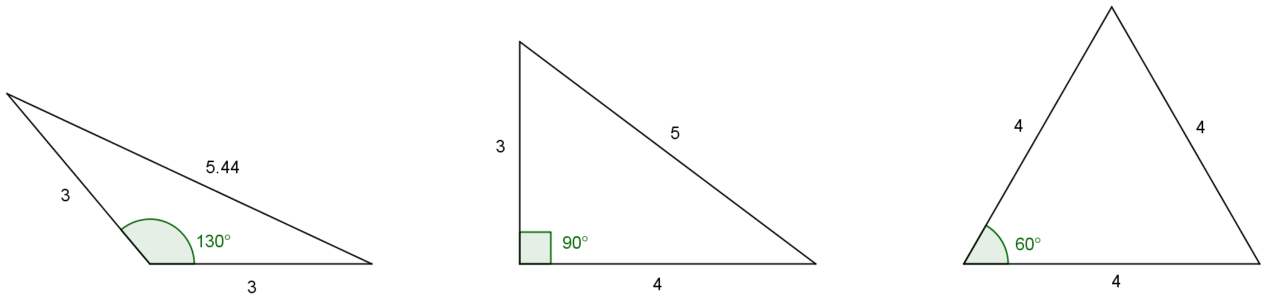
Sovella nyt keksimääsi kaavaa seuraaviin kolmeen kolmioon. Kirjoita kaava kussakin kolmiossa sen alapuolelle.





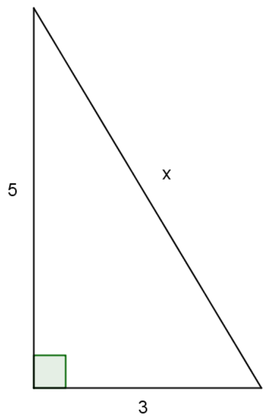


Tutki päteekö teoriasi erilaisiin kolmioihin ja tarkenna tarvittaessa teoriaasi.

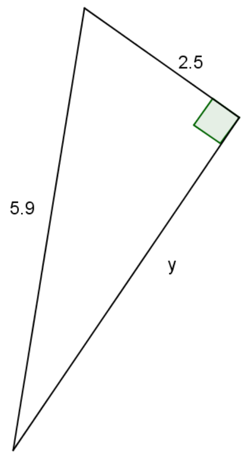


Tehtävä: Ratkaise x ja y. (Apua voit tarvittaessa katsoa alapuolelta.)

a)

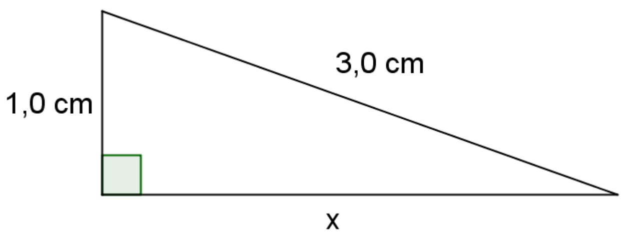


b)



Ratkaise x.

$x^2 + 1{,}0^2 = 3{,}0^2$
$x^2 + 1{,}0 = 9{,}0$
$x^2 = 9{,}0 - 1{,}0$
$x^2 = 8{,}0$
$x = \sqrt{8{,}0}$
$x \approx 2{,}8$ (cm)



Sivun ratkaiseminen:

Nimeä vastaava sivu:

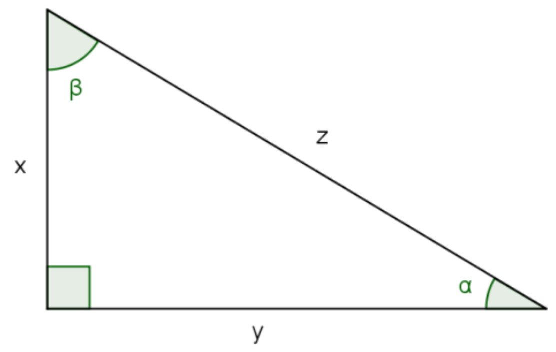
Kulman α vastainen kateetti ___

Kulman α viereinen kateetti ___

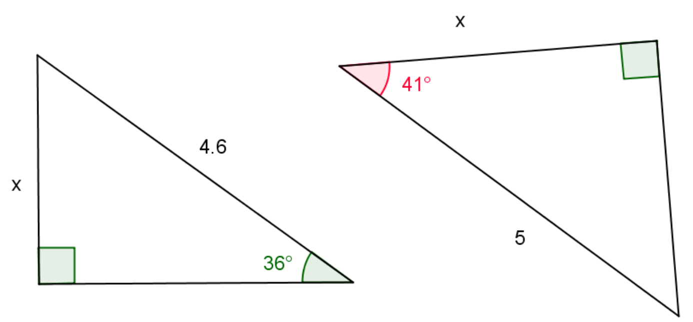
Kulman β vastainen kateetti ___

Kulman β viereinen kateetti ___

Hypotenuusa ___



Ongelma: Ratkaise x molemmista kolmioista.



Miten tehtävän voisi ratkaista? Voitko käyttää aikaisempia teorioita hyväksi? Tarvitaanko uusia teorioita? Minkälaisia?

Siirry sovelman 1 pariin

Havainnot:

1.

2.

3.

sin → 3 → 6 → =

sin → 4 → 8 → =

sin → 6 → 1 → =

4.

Mitä tarkoittavat luvut $\sin 36°$, $\sin 48°$ ja $\sin 61°$?

Yleistä äsken kirjoittamasi selityksesi kulmalle α käyttämällä hyväksi alun nimeämistehtävää:

$\sin \alpha =$

Siirry sovelman 2 pariin.

Havainnot:

1.

2.

3.

cos → 2 → 5 → =

cos → 4 → 1 → =

cos → 5 → 8 → =

4.

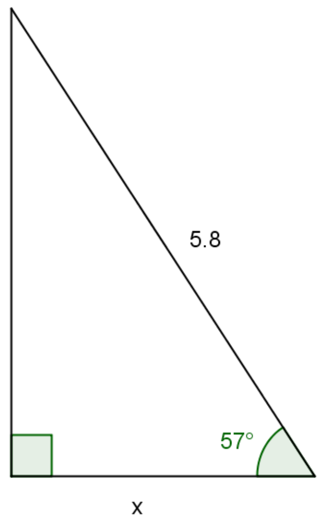
Mitä tarkoittavat luvut $\cos 25°, \cos 41$ ja$\cos 58\,°$?

Yleistä äsken kirjoittamasi selityksesi kulmalle α käyttämällä hyväksi alun nimeämistehtävää:

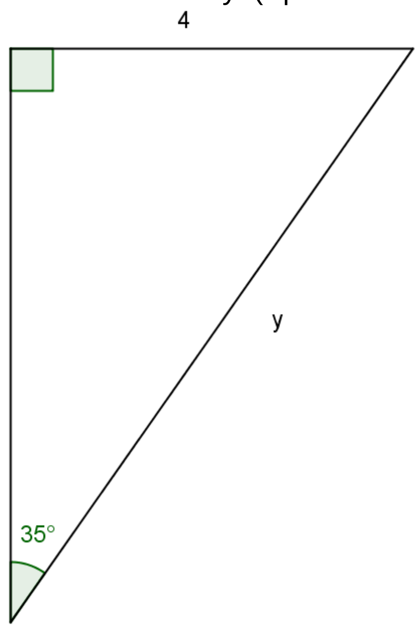
$\cos\alpha =$

LIITE 3 (3)

Tehtävä: Ratkaise x sinin ja kosinin avulla. (Apua voit tarvittaessa katsoa seuraavalta sivulta.)



Tehtävä: Ratkaise y. (Apua voit tarvittaessa katsoa seuraavalta sivulta.)



Laske tasasivuisen kolmion ABC pinta-ala.

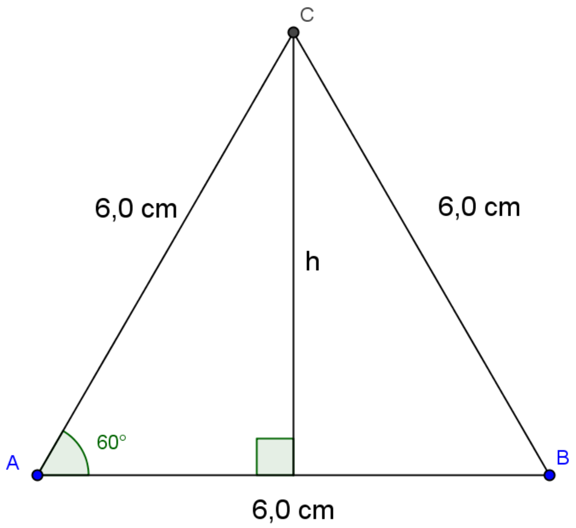
$$\sin 60° = \frac{h}{6{,}0}$$

$$h = 6{,}0 \cdot \sin 60°$$

$$A = \frac{6{,}0 \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{6{,}0 \cdot 6{,}0 \cdot \sin 60°}{2}$$

$$A \approx 16\ (cm^2)$$



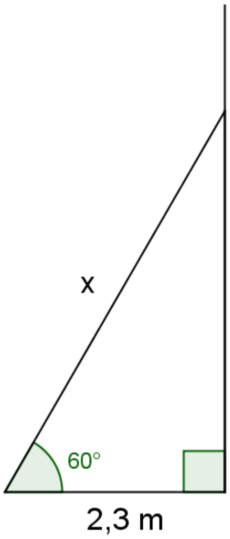
Tikkaat nojaavat seinään 60° kulmassa maahan nähden 2,3 m etäisyydellä seinästä. Kuinka pitkät tikkaat ovat. Piirrä kuva.

$$\cos 60° = \frac{2{,}3}{x}$$

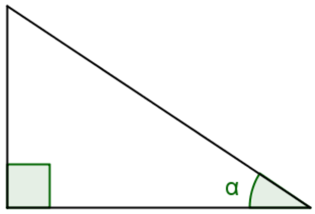
$$x \cdot \cos 60° = 2{,}3$$

$$x = \frac{2{,}3}{\cos 60°}$$

$$x = 4{,}6\ (m)$$

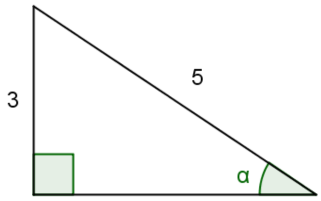


Kulman ratkaiseminen:
Ongelma: Ratkaise kulma α.



Mitä tietoja tarvitset tehtävän ratkaisemiseksi? Soveltuuko aikaisempi teoria vai tarvitaanko uusia tietoja? Minkälaisia?

Entä jos tiedät kahden sivun pituudet:



Voidaanko tässä tilanteessa ratkaista kulma α? Pystytkö käyttämään aikaisempia teorioita vai tarvitaanko uusia tietoja? Minkälaisia?

Siirry sovelman pariin.
Havaintosi:
1.

2.

3.

4.

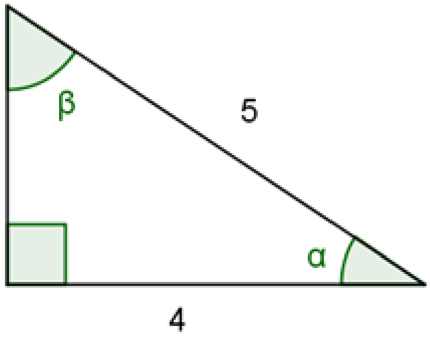
5.

6.

7.

Mitä tarkoittavat $\sin^{-1}$ ja $\cos^{-1}$ jostakin luvusta x?

Tehtävä: Ratkaise kulmat α ja β. (Apua voit tarvittaessa katsoa sivun alareunasta.)

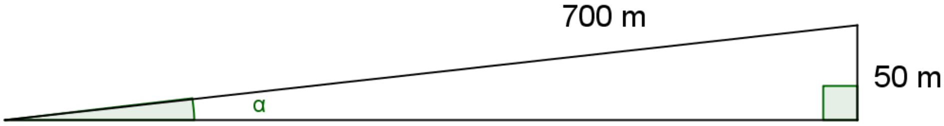


Laske kaltevuuskulma, kun 700 metrin matkalla tie nousee 50 metriä. Piirrä kuva.

$\sin\alpha = \frac{50}{700}$

$\sin\alpha = 0{,}0714$

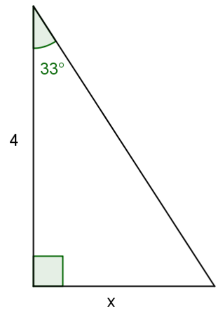
$\alpha \approx 4°$



LIITE 5 (1)

Tangentti:

Ongelma: Ratkaise x.



Ratkaise tehtävä aiempia teorioita hyödyntämällä.

Siirry sovelman 1 pariin.
Havainnot:
1.

2

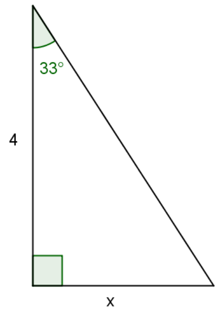
3.

Mitä tarkoittavat luvut $\tan 30°$, $\tan 44°$ ja $\tan 59°$?

Yleistä äsken kirjoittamasi selityksesi kulmalle α käyttämällä hyväksi suorakulmaisen kolmion sivujen nimiä:

$\tan \alpha =$

Ratkaise nyt x alkuperäisestä ongelmasta uuden teorian avulla:



Eroaako vastauksesi? Jos eroaa, mistä tämä voisi johtua?

Mitä hyötyä uudesta teoriasta on?

LIITE 5 (2)

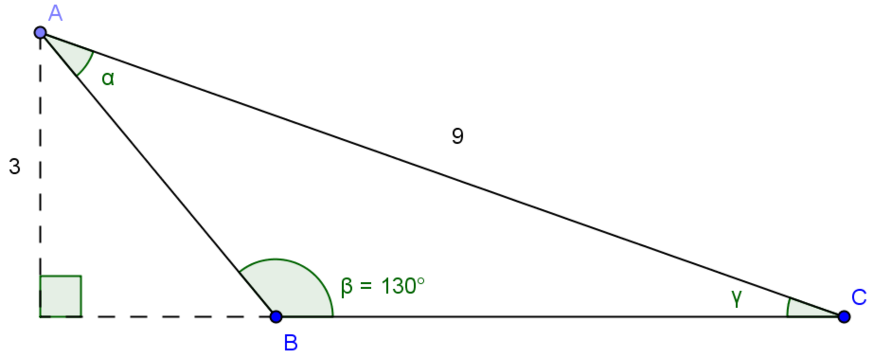
Siirry sovelman 2 pariin.
Havainnot:
1.

2.

3. ∠ ACB ≈

∠ BAC ≈

Tehtävä: Ratkaise kolmio ABC.



LIITE 6 (1)

Palaute

Mihin sovelmaan tutustuit?

- Kolmioiden yhdenmuotoisuus
- Pythagoraan lause
- Sin, cos (sivun ratkaiseminen)
- Sin, cos (kulman ratkaiseminen)
- Tangentti

Taustatiedot:

- Perustutkinto-opiskelija
- Maisteri

Opiskelen/olen valmistunut aineenopettajaksi:

- Kyllä
- Ei

Mikä on/oli pääaineesi?

- Matematiikka
- Fysiikka
- Kemia
- Muu:

Opetuskokemus:

- Ei lainkaan
- Vähän

- Jonkin verran
- Melko paljon
- Paljon

GeoGebran käyttökokemus:

- Ei lainkaan
- Vähän
- Jonkin verran
- Melko paljon
- Paljon

Oliko sovelmia helppo käyttää? Olivatko ohjeet ja kysymykset selkeitä?

Koetko, että nämä sovellukset ja tehtävät voisivat auttaa oppilasta ymmärtämään teorian verrattuna perinteiseen opettajajohtoiseen liitutauluopetukseen?

Mitä hyvää tai huonoa on sinun mielestäsi tällaisessa opetustavassa oppilaan ja opettajan kannalta?